

5.



# NUOVA TEORIA

DELLE

# LINEE ORARIE

## RIFERITE ALL'ORIZZONTE

SCOPERTA E DIMOSTRATA

**DAL P. STEFANO DI GIOVANNI**

D. C. D. G.

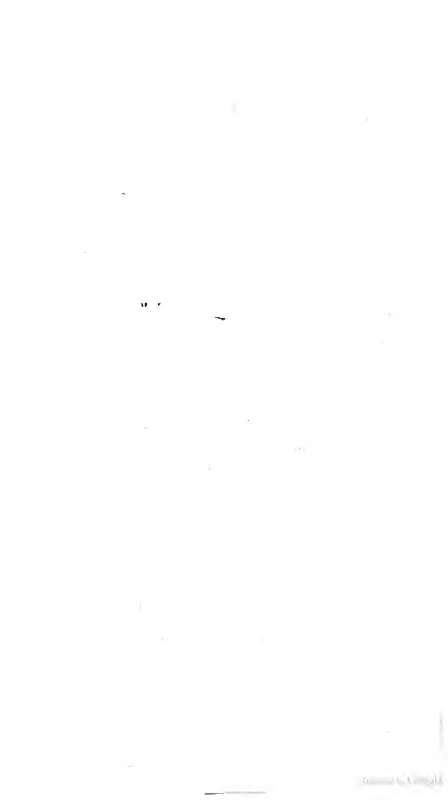




**PALERMO**

DALLA TIPOGRAFIA DI FRANCESCO LAO

**1845**





# INTRODUZIONE

Le ore astronomiche si riferiscono per limite al meridiano, ma le italiane e le babilonesi si riferiscono all'orizzonte, le prime al lembo occidentale, le seconde al lembo orientale.

Nella Gnomonica le linee orarie riferite al meridiano hanno avuto sempre una teoria geometrica e facilissima, non così quelle riferite all'orizzonte. Si credette meglio costruirle indirettamente dopo di aver delineato l'orologio astronomico, e tracciate per punti le curve dei tropici.

Già si sapeva che le linee orarie italiane e babilonesi erano sezioni di circoli massimi: pure tali circoli non furono giammai analizzati in modo da cavarne una teoria immediata e particolare.

Io dunque mi sono occupato di questa analisi, e adesso nella presente teoria dimostro, che le linee orarie italiane e babilonesi, come sezioni di circoli massimi, dipendono da certi raggi vettori che hanno il centro nel piede dell' indice, e da certe sezioni di meridiani corrispondenti che partono dal centro del quadrante, en-

trambi di costruzione facile e geometrica. Le linee orarie sono perpendicolari ai primi, e parallele alle seconde.

A definire la lunghezza delle orarie, ed a descrivere le curve de' tropici ho trovato un nuovo analemma, il quale non dipende dalla declinazione meridiana, ma dall' ampiezza ortiva.

Costruito il triangolo polare, io non ho di bisogno per dare alle linee orarie la loro esatta posizione, che della sola regola e del compasso: pure ho voluto arricchire il trattato di molte tavole, nelle quali sono calcolate tutte le quantità utili all' uopo. Con esse si evitano gli errori delle intermedie costruzioni, e si va rapidamente agli ultimi risultati.

L' opera è divisa in tre parti, nella prima dimostro la teoria, nella seconda insegno la pratica, nella terza rendo l' una e l' altra più perfetta coll' applicazione del calcolo. Tutto è dimostrato a rigore.

Nel corso del lavoro ho avuto la consolazione di trovare una nuova curva, di cui presento la natura certa e le varie affezioni.

Intanto bisogna avvertire, che non è questo un trattato di Gnomonica, ma semplicemente un saggio scientifico de' rapporti di un circolo massimo qualunque della sfera posta in moto, riferendone le successive posizioni alla posizione primitiva. Ho scelto un orizzonte qualunque, e stabilitolo prima come fermo, ne ho considerato poi come mobile tutte le variazioni. La teoria astratta sarebbe rimasta oziosa: si fece divenire concreta ed utile applicandola alla Gnomonica.

# NUOVA TEORIA

## DELLE LINEE ORARIE RIFERITE ALL'ORIZZONTE

---

## PARTE PRIMA

### DIMOSTRAZIONI TEORICHE

---

### Idee Preliminari

1. Sia *(fig. 1)* *OPDB* il meridiano, *P* il polo, *OEBA* l'orizzonte. Sarà *OB* la linea meridiana, *O* a nord, *B* a sud, *AE* la sezione dell'equatore, *A* ad est, *E* ad ovest, *TT'* i punti dove i paralleli de' tropici toccano l'orizzonte, *T* il tropico del cancro, *T'* quello del capricorno, *OD* il parallelo massimo visibile, a cui l'orizzonte è tangente nel punto *O*. Fig. 1.

2. Or giri la sfera intorno all'asse che passa per *P*, i punti *O*, *T*, *E*, *T'*, *B* ec. gireranno insieme coi paralleli, ai quali appartengono, e con cui io li considero come invariabilmente congiunti.

Egli è chiaro: I che l'orizzonte *OEBA* in tutte le sue nuove posizioni resta sempre tangente ad *OD* parallelo massimo visibile. Chiamo *OEBA* nella sua prima posizione orizzonte *fermo*, e nelle altre che prende gi-

rando colla sfera orizzonte *mobile*, riferisco sempre le nuove posizioni alla prima.

II. Tutti i punti dell'orizzonte *mobile* dopo il giro di 360° collimano perfettamente sul *fermo* come prima del moto.

III. Tutti i punti dell'orizzonte *mobile* percorrono nello stesso tempo ugual numero di gradi scostandosi dal *fermo:* tagliano dunque tutti i paralleli in parti fra loro uguali in gradi, incominciando a contare dall'orizzonte *fermo*, e terminando all'orizzonte *mobile*.

IV. Dunque l'orizzonte *mobile* è circolo orario delle ore riferite per limite all'orizzonte *fermo*. Il lembo o semicircolo orientale dell'orizzonte movendosi verso occidente segna colle sue sezioni successive le ore babilonesi, ed il lembo o semicircolo occidentale movendosi al modo stesso, quando ritorna dall'oriente segna le ore italiane.

*N. B.* Da ciò si deduce il metodo di costruire una machinetta, che segni le ore di questo genere.

FIG. 27. *Descrizione*. Vi sia *(fig. 27)* un piede che porti un semicerchio, che rappresenti il meridiano. L'asse del mondo ne sia il diametro, si elevi e diriga il polo secondo ricerca il paese. Sia unito all'asse un anello mobile con lui, che rappresenti l'orizzonte. Abbia questo anello due fessure una ad oriente ed una ad occidente. Porti il meridiano un piccolo quadrante diviso in 24 ore come si usa nelle sfere armillari, e l'asse del mondo che passa pel suo centro sia armato della solita freccia. Si può adoperare il solo triangolo polare, *(fig. 27 bis)* che giri intorno alla sua ipotenusa, purchè il cateto orizzontale sia un piano.

*Uso.* Se si vogliono le ore babilonesi, tenendo l'anello orizzontale si metta la freccia alle ore 24: poscia si faccia girare in su il lembo orientale, sicchè la luce del sole entrando per la fessura incontri il lembo inferiore, allora la freccia indicherà l'ora babilonese, cioè quante ore sono scorse dal sorgere del sole.

Se poi si vogliono le ore italiane antiche, si metta la freccia alle ore 24, se le ore civili, a $23^h$, $30'$. Si porti in su girando il lembo occidentale, e quando la luce che passa per la fessura incontra l'arco inferiore, allora la freccia segna l'ora ricercata.

V. Le linee orarie italiane o babilonesi sono sezioni dell'orizzonte mobile, e perciò di circoli massimi.

VI. Questi circoli sono sempre tangenti allo stesso parallelo massimo visibile, perciò rappresentano gli orizzonti di tutti i periciani (1) relativi al paese di cui si tratta.

## ESAME I.

*Ampiezza ortiva ne' solstizî ed arco semidiurno.*

3. È necessario dapprima conoscere la distanza dei tropici dall'equatore in arco orizzontale, cioè il valore *TE* ed *ET'*, perchè questa è la parte dell'arco orario toccata dal sole nel corso dell' anno, e poscia gli

(1) Periciani. I popoli che abitano alla stessa latitudine, ovvero i paesi che sono nello stesso parallelo.

angoli *OPT* ed *OPT'* per sapere con essi gli archi semidiurni ne' solstizî, e quindi quante ore possono entrare nell' orologio.

4. Nel triangolo *POT* ovvero *POT'* si conoscono, $PO = E$ elevazione del polo....$PT$, e $PT'$ ipotenusa $= 90° \mp d$ declinazione del sole; avremo dunque

$$\text{I.}^{\circ}\ Cos\ OT = sen\ TE = \frac{cos\ PT}{cos\ PO} = \frac{sen\ d}{cos\ E}$$

$$\text{II.}^{\circ}\ Cos\ OPT = \frac{tang\ PO}{tang\ PT} = tang\ E.\ tang\ d.$$

da cui si dedurrà *OPT'*, ed i supplementi *TPD*, *T'PD* che considerati in arco danno il valore degli archi semidiurni ne' solstizî.

5. Per vedere i rapporti e le variazioni delle quantità introdotte nel calcolo, presento il problema colle seguenti

COSTRUZIONI PIANE

Primo caso $Sen\ TE = \frac{sen\ d}{cos\ E}$

*Fig. 2.* 6. Con un raggio qualunque *BO* (*fig. 2*) si descriva un circolo, e facendo *EO* la sezione dell'orizzonte, sia *OP* l'elevazione *E* del polo, onde $BC = cos\ E$. Si descriva con *BC* un circolo concentrico. Ciò eseguito, si prendano gli archi *ED*, *EA* uguali alla declinazione *d* del sole ne' tropici, e si segnino i raggi *DB*, *AB*. Poscia condotta la *DeA*, e le parallele *Dd*, *Aa* al raggio *EB* sino al circolo interno, si tiri *dbe* parallela a *DeA*, e per *d* ed *a* le secanti *BdT*, *BaT* si avrà

$De = db$ come $eA = ba$,...ma $De = sen\ d$

$db = sen\, EBT \cos E$: dunque $sen\, EBT = \frac{sen\, d}{\cos E}$.

Dunque $EBT$ della *fig. 2* rappresenta $TE$ della *fig. 1*, come $EBT'$ rappresenta $ET'$.

*Nota Bene*. Questa costruzione della *fig. 2* serve per l'analemma de' segni, onde determinare la lunghezza delle linee orarie, ed i punti per cui passano le curve de' tropici.

*Variazioni.*

I. $EBT > EBD$ (*fig. 2*): dunque $TE > d$ (*fig. 1*): finchè $\cos E$ sarà una frazione, ed $E$ nè $90°$ nè $0°$.

II. $\cos E = 1$ cioè all'equatore, dove $E = 0°$, sarà $EBT = EBD$ (*fig. 2*) come $TE = d$ (*fig. 1*), perchè allora fa di orizzonte un meridiano, e l'ampiezza è uguale alla declinazione.

III. $\cos E = 0$ cioè al polo, dove $E = 90°$, sarà $sen\, EBT = \infty$, cosa impossibile, dunque non ha luogo l'ampiezza $TE$.

7. Veggiamo che cosa ci dia il calcolo (*fig. 1*).

Sia $PT = 66°, 32'$...sarà $PT' = 113°, 28'$... $\pm\, l \cos = 9.60012$

$PO = E$ in Palermo $38°, 6', 44''$ (Piazzi) $l' \cos = 0.10413$

$+\, l \cos OT$....$-\, l \cos OT'$. . . . . $= \pm\, 9.70425$

$OT = 59°, 55', 40''$..$OT' = 120°, 24', 20''$..$TE = ET' = 30°, 24', 20''$

Secondo caso $\cos OPT = tang\, E\; tang\, d$.

8. *Costruzione I* — Con un raggio qualunque $AC$ si descriva (*fig. 3*) un circolo: sia $AB$ la sezione dell'orizzonte: $BCP$ l'elevazione $E$ del polo, onde $PB = tang\, E$. All'estremità $A$ si formi un angolo $CAG = 90° - d$ FIG. 3.

(ossia $PT$ *fig.* 1), di cui $CG$ è la tangente, e con essa si descriva il circolo concentrico $GDF$. Ciò fatto si conduca $PD$ parallela a $CF$, e la perpendicolare $DE$, ed il raggio $CD$; avremo $PB = DE$, cioè $\tan E = \cos GCD \cdot \tan(90^\circ - d)$: onde $\cos GCD$ (ossia $OPT$ *fig.* 1.) $= \tan E \tan d$.

Sarà $GD$ l'arco semidiurno nel tropico di capricorno, e $180^\circ - GD$ nel tropico di cancro.

*Variazioni.*

I. Considerando $\tan d$ come costante e come frazione avremo $\cos GD < \tan E$ rapporto eterogeneo ed indeterminato: si guardi dunque la fig. 3ª: $GCD > GCP$ per la differenza $PCD$: onde $GD > 90^\circ - E$.

II. Quando $P$ è in $B$, sarà $D$ in $F$, e la differenza $PCD = 0^\circ$, allora $E = 0^\circ$, siamo cioè all'equatore, allora $GD = 90^\circ$.

III. Crescendo $E$, la differenza $PCD$ prima cresce e poi diminuisce: cosicchè quando $P$ arriva nel circolo esterno in $P'$, anche $D$ si confonde con $P'$. Si determini questa altezza di polo $P'CB$....

$$BF : BP' = BP' : BH \ldots \overline{BP'}^2 = BF \times BH.$$

$$\tan^2 E = (\cot d - 1)(\cot d + 1) = \cot^2 d - 1^2$$
$$= \cot^2 d - \cot d \tan d = \cot d(\cot d - \tan d)$$
$$= 2 \cot d \cot 2d$$

Sia $d = 23^\circ, 28'$.

$$\left.\begin{array}{l} \log 2 = 0.30103 \\ \log \cot d = 0.36239 \\ \log \cot 2d = 9.97067 \\ \hline 2 \log \tan E = 0.63409 \\ \log \tan. E = 0.31704 \end{array}\right\} \text{onde } E = 64^\circ,\ 16',\ 13''$$

IV. Quando $P$ esce dal circolo esterno, la differenza $PCD$ diviene negativa, e $GD < 90 - E$. Quando $P$ arriva in $P''$, e $tang\ E = cot\ d$, allora $tang\ E.\ tang\ d = 1 \ldots.\ GD = 0°$. Ciò avviene entrando nel cerchio polare, dove il giorno massimo è di $24^h$, ed il giorno minimo di ore zero. Avanzandosi al polo la variazione è più grande, nè ha più luogo arco semidiurno.

9. *Costruzione II* — Con nn raggio qualunque $AC$ si descriva (*fig. 4*) un circolo. Sia $AB$ la sezione del l'orizzonte $CBP$ l'elevazione $E$ del polo: $CP = tang\ E$, con essa come raggio si descriva nn altro circolo concentrico. Si formi l'angolo $PCD = d$ declinazione del sole, di cui $PD$ sia la tangente. Si tiri $DE$ parallela a $CF$ sino all'incontro del circolo esterno in $E$, e di qua la perpendicolare $EG$, e la retta $CE$. Si avrà $EG$ $(cos\ AE) = DF\ (tang\ E\ tang\ d)$. FIG. 4.

In questa (*fig. 4*) $ACE > ACD \ldots .AE > 90° - d$.

Qui l'arco semidiurno è $AE$ e $180° - AE$.

Le variazioni di $E$ furono analizzate di sopra.

*N. B.* Ho considerato la declinazione $d$ del sole come costante, ma dagli astronomi conosco che $d$ diminuisce, questa variazione influir deve nella durata de' giorni massimo e minimo. Sarebbe ottimo osservarla con cronometri perfetti.

10. Quantunque le costruzioni lineari sieno due pure il calcolo è unico come la formola.

Sia $d = 23°\ 28'$, $\qquad log\ tang\ d = 9.63761$

$E = 38°, 46', 44''$, $\qquad log\ tang\ E = 9.89456$

Sarà $log\ cos\ OPT$ (*fig. 1*) ovvero $OPT' \ldots = \pm\ \overline{9.53217}$

onde $OPT = 70°,\ 5',\ 30''; OPT' = 109°,\ 54',\ 30''$
ed in tempo $= 4^h,\ 40',\ 22''.. \quad = 7^h,\ 19',\ 38''$
viceversa gli archi semidiurni.

$TPD = 109°,\ 54'\ 30''; T'PD = 70°,\ 5',\ 30''$
ed in tempo $= 7^h\ 19',38'' \quad = 4^h,40',\ 22''$
onde il giorno intiero in està $14^h,\ 39',\ 16''$, in inverno $9^h,\ 20',\ 44''$.

11. Le ore babilonesi numerano il tempo già trovato di sopra: le ore italiane civili distano questo tempo dal tramonto, cioè da $23^h,\ 30'$: dunque il sorgere del sole sarà a 21 giugno alle ore $8,^h\ 50',\ 44''$, a 23 decembre a $14^h,\ 9',\ 16$.

*N. B.* Ognuno facilmente si accorge, che io qui non tengo conto della refrazione astronomica, perchè essa non fa parte delle costruzioni geometriche. Intanto la refrazione accresce la durata del giorno di circa sei minuti.

Passiamo a più importanti ricerche.

## ESAME II.

### *Deviazione ed inclinazione dell' orizzonte mobile sul fermo.*

*Fig. 5.* 12. Giri la sfera (*fig.5*) per un numero di gradi $OO'$ contati nel parallelo massimo visibile $OD$, cosicchè il punto $O$ dell'orizzonte divenuto mobile si trovi in $O'$, e la sua posizione sul fermo divenga $AO'B$. La sezione sarà $AB$, che devia da $OH$ la quantità espressa dall' arco $OA$. Nelle ore italiane $OA$ va da nord ad

ovest, e nelle babilonesi da nord ad est. — Chiamerò $D$ la deviazione.

L'inclinazione de' piani è $OAO' = I$ da un lato, e dall'altro $O'AE = I' \ldots I + I' = 180^\circ \ldots \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = 90^\circ$.

13. Or i due triangoli sferici $POA$, e $PO'A$ sono uguali: imperciocchè sono rettangoli in $O$, ed in $O'$, mentre l'orizzonte sia fermo $OEH$, sia mobile $AO'B$ è sempre tangente al parallelo $OD$. I due cateti $PO$, $PO'$ sono uguali all' elevazione $E$ del polo, e l'ipotenusa $PA$ è comune: dunque $OA$ deviazione ugnale $AO'$ elevazione del punto $O$.

14. Prima di venire alla risoluzione de' triangoli voglio notare tre cose: I. Chiamo $V$ vertice di un arco il suo punto di culminazione sopra l' orizzonte *fermo*: sarà qui $V$ dell' orizzonte *mobile* il punto che dista $90^\circ$ da $A$ e da $B$ della sua sezione $AB$, dove la normale $CV$ elevandosi dal centro $C$ sulla $AB$ e dentro il piano $AO'B$ va a terminare.

II. Siccome l' $E'$ punto equinoziale dell' orizzonte *mobile* dista da $O'$ novanta gradi, ed il vertice $V$ dista da $A$ parimenti $90^\circ$, perciò togliendo $O'V$ parte comune, resterà $EV = AO' = OA$ cioè la distanza del punto equatoriale dal vertice è uguale alla deviazione della sezione oraria. Quindi i tropici $T$, $T'$, i quali distano da $E$ la quantità $TE$ disteranno da $V$, la qnantità $TE \mp OA$ secondo che il vertice si accosta all' uno o all' altro tropico.

III. Sull' inclinazione $I$ si avverta, che tanto il vertice $V$ dista da zenit $Z$, quanto l' inclinazione differisce da $90^\circ$: onde se $I = 90^\circ$, il circolo orario è ver-

ticale, e $VZ = 0°$; in tutte le altre posizioni $VZ = \pm 90° \mp I$ cioè la differenza positiva tra $90°$ ed $I$.

15. Soluzione del triangolo $POA$. Quantità note.

I. $OPA = APO' = \frac{1}{2}\, OPO'$ che dico $\frac{1}{2}\, P$: giacchè $OPO'$ è angolo al polo $P$. Egli è questo angolo orario, perchè misura il tempo del moto dalla prima alla seconda posizione dell'orizzonte *mobile*. Or $\frac{1}{2}\, P$ si suppone noto.

II. È noto $PO = PO' = E$ elevazione del polo, o latitudine del paese. Si cercano $AO = D$...ed $OAP = PAO' = \frac{1}{2}\, I$.

FORMOLE.

I. $Tang\ OA = tang\ APO.\ sen\ PO$, ossia $tang\ D = tang\,\frac{1}{2}\, P\ sen\ E$.

II. $Cos\ OAP = sen\ APO.\ cos\ PO$ ossia $cos\,\frac{1}{2}\, I = sen\,\frac{1}{2}\, P\, cos\ E$.

COSTRUZIONI PIANE

*che servono per vedere l' andamento de' risultati.*

FIG. 6. 16. Primo caso. Con un raggio qualunque $AC$ si descriva (*fig. 6*) un circolo. Sia $CPO$ l'elevazione $E$ del polo, $CO = sen\ E$, con $CO$ presa per raggio si segni un altro circolo concentrico, in cui incominciando da $z$ si divida l'arco $za$ secondo i semiangoli orari ($APO = \frac{1}{2}\, P$) (*fig. 5*); dando all' ora 23, perchè distante dal limite (tramonto) mezz' ora, $3°$, $45'$. Dell' ora 23

l'angolo $P = 7°, 30'$ dunque $\frac{1}{2} P = 3°, 45'$. Si vada crescendo di $7°30'$ dando all'ora 22 per $\frac{3}{2} P = 11°, 15'$, all'ora 21 per $\frac{5}{2} P = 18° 45'$, e così di seguito.

17. Sia $dCz$ un angolo qualunque $APO = \frac{1}{2} P$, e la sua tangente $zd$. Si conduca $dD$ parallela al raggio $CZ$, e da $Z$ la tangente $ZD$, ed al punto $D$ la secante $CD$: avremo $DZ = dz$... cioè $tang\ DCZ = tang\ dCz$. $CO = tang \frac{1}{2} P\ sen\ E$: dunque $DCZ$ è il valore cercato di $OA = D$.

*Variazioni.*

I. Guardando la fig. 6, si osserva che $DCZ < dCz$, onde $D < \frac{1}{2} P$; ma ciò avviene, perchè $sen\ E$ è una frazione.

II. Fatto $sen\ E = 1$ cioè al polo, $D = \frac{1}{2} P$. Ma siccome al polo fa di orizzonte l'equatore, e questo girando colla sfera si rivolge intorno a se stesso, perciò non vi ha elevazione $AO'$ (*fig. 5*) che anzi l'$AO'$ si distende anch'esso sull'orizzonte, e l'elevazione si aggiunge alla deviazione.

III. Fatto $sen\ E = 0$ cioè all'equatore... $D = 0°$. Imperciocchè facendo ivi di orizzonte il meridiano dell'ora VI, e toccando il polo l'orizzonte, non vi è parallelo massimo visibile, quindi nè deviazione $OA$, nè elevazione $AO'$.

IV. Quando $\frac{1}{2} P = 45°$, allora $tang \frac{1}{2} P = 1$, onde $tang\ D = sen\ E$.

V. Finalmente quando $\frac{1}{2} P = 90°$, allora $D = \frac{1}{2} P$, ciò che avviene alle ore 12 dopo del sorgere o prima del tramontare.

*Fig.* 7. 18. Secondo caso. Con un raggio qualunque $AC$ si descriva (*fig.* 7) un circolo, sia $OCP$ l'equazione $E$ del polo, $CO = \cos E$. Col raggio $CO$ si descriva un altro circolo concentrico, ed incominciando da $z$ si divida l'arco $zE$ secondo i semiangoli orari $\frac{1}{2}\ P$: sieno queste divisioni in $a$, $a'$ $a''$ ec. Si conducano i seni $\frac{1}{2}\ P$, cioè $as$, $a's'$, $a''s''$ ec., e per i punti $a$, $a'$, $a''$, le parallele al raggio $CZ$, cioè $cc'$, $dd'$, $bb'$, ed i raggi $eC$, $dC$, $bC$, $Ce'$, $Cd'$, $Cb'$. Gli angoli $ACe$, $ACd$, $ACb$, rappresentano gli angoli $OAP$ (*fig.* 5) cioè $\frac{1}{2}\ I$ ricercati, ed i loro doppi $eCe'$, $dCd'$, $bCb'$ rappresentano gli angoli intieri $I$ d'inclinazione dell'orizzonte mobile sul fermo dalla parte del polo $P$.

Così dalla parte opposta $eCZ$, $dCZ$, $bCZ$ rappresentano gli angoli $\frac{1}{2}\ I'$, ed i loro doppi gl' intieri $I'$. Imperocchè

$$as = lC \ldots a's' = kC \ldots a''s'' = iC \text{ cioè}$$
$\cos \frac{1}{2}\ I = \text{sen} \frac{1}{2}\ I' = \text{sen} \frac{1}{2}\ P \cos E$ come richiede la formola.

*Variazioni.*

I. Essendo $\cos E$ una frazione, sarà $\cos \frac{1}{2}\ I < \text{sen} \frac{1}{2}\ P$ ($\cos 90 - \frac{1}{2}\ P$) onde $\frac{1}{2}\ I > 90° - \frac{1}{2}\ P \ldots I > 180° - P$: come ancora $\text{sen} \frac{1}{2}\ I' < \text{sen} \frac{1}{2}\ P$, e perciò $\frac{1}{2}\ I' < \frac{1}{2}\ P \ldots I' < P$. E riguardando negli archi della fig. 7 il solo numero de' gradi.

$$Ae > Ea \ \ldots\ Ad > Ea' \ \ldots\ Ab > Ea''$$
$$eZ < az \ \ldots\ dZ < a'z \ \ldots\ bZ < a''z$$

II. Variando $\cos E$, variano i valori di $\cos \frac{1}{2}\ I$.

1. $\cos E = 0$ cioè al polo... $\cos \frac{1}{2}\ I = 0 \ldots \frac{1}{2}\ I = 90°$

$I = 180°$; cioè l'inclinazione è costante, idest massima o nulla.

2. $Cos\ E = 1$ cioè all'equatore... $cos\ \frac{1}{2} I = sen\ \frac{1}{2} P$ $\frac{1}{2} I = 90 - \frac{1}{2} P$; $I = 180° - P$, cioè l'angolo che il circolo orario fa coll' orizzonte è supplemento di quello che esprime l' ora. Intanto $I' = P$.

III. Quando $\frac{1}{2} P = 90°$ cioè alle ore dodici dopo il sorgere o prima del tramontare, allora $sen\ \frac{1}{2} P = 1$... $cos\ \frac{1}{2} I = cos\ E$, $\frac{1}{2} I = E \ldots I = 2E$.

## CERCHIO ORARIO VERTICALE.

19. Se l' orizzonte *mobile* sul *fermo* fa prima angolo ottuso e dopo acuto, o viceversa, egli è chiaro che in qualche posizione farà angolo retto. Allora $OAO' = I = 90° \ldots \frac{1}{2} I = 45°$. Supposto dunque l'angolo $\frac{1}{2} I = 45°$, ed il lato $PO = E$ (*fig. 5*) si cerchino $OA$ cioè la deviazione $D$, ed il semiangolo orario $\frac{1}{2} P$.

### FORMOLE.

I. $Sen\ D = tang\ E$...in Palermo $l\ tang\ E = 9,89456$ $= l\ sen\ 51°, 40', 9''$.

II. $Sen\ \frac{1}{2} P = \frac{cos\ 45°}{cos\ E}$...$l\ cos\ 45° = 9.\ 84949$
$+ l'\ cos\ E = 0.\ 10413$
$= 9.\ 95362$

onde $\frac{1}{2} P = 63°, 59', 20'' \ldots P = 127°, 58', 40''$, ed in tempo $8^h, 31', 54'', 40'''$ dopo il sorgere o prima del tramontare : cioè nelle ore italiane civili, $14^h, 58', 5'', 20'''$ cioè quasi alle ore $15^h$. 3

*Le presenti costruzioni servono per dar lume alle variazioni delle quantità, e rendere la dimostrazione più generale: appresso ne darò altre che renderanno la pratica più facile.*

20. Primo caso *sen* $D = tang\ E$. Con un raggio
FIG. 8. qualunque $AC$ si descriva (*fig.* 8) un circolo: Sia l'angolo $PCB = E$ elevazione del polo, $BP = tang\ E$. Da $P$ si tiri $PD$ parallela a $CB$, e si abbassi il seno $DE$, segnando il raggio $CD$. Sarà $DE = PB$, cioè $sen\ DCB = tang\ E$. Dunque l'angolo $DCB$ o l'arco $DB$ rappresentano la deviazione $D$ del circolo orario verticale.

## *Variazioni.*

I. Nella figura 8 $DCB > PCB$, onde $D > E$.

II. Ma quando $P$ è in $B$, perchè $E = 0°$ cioè all'equatore, allora anche $D$ è in $B$, dunque $D = 0°$ cioè non vi ha deviazione.

III. Quando $E = 45°$...$tang\ E = 1$...$D = 90°$.

IV. Quando $E > 45°$...$tang\ E > 1$...$sen\ D > 1$, cioè non ha più luogo circolo orario verticale. Il limite dunque è al grado $45°$ di elevazione per aver l'orario verticale.

21. Secondo caso $sen\ \frac{1}{2} P = \frac{cos\ 45°}{cos\ E}$. Con un rag-
FIG. 9. gio qualunque $AC$ si descriva (*fig.* 9) un circolo. Sia $CO = cos\ E$, e con esso si descriva un altro cir-

colo concentrico. Dal lato di $A$ si faccia l'angolo $ACD = 45°$, ed abbassata da $D$ la normale $DG$, e la parallela $DE$ al raggio $AC$ sino all'incontro del circolo interno, si aggiunga un'altra normale $EH$: finalmente si tiri per $E$ il raggio $CF$ avremo

1. $DG = GC = \cos 45°$.
2. $DG = EH = \text{sen}\, HCE \cos E$.

Dunque $\text{sen}\, HCE = \frac{\cos 45°}{\cos E}$ : onde l'angolo $ACF$ o l'arco $AF$ rappresentano $\frac{1}{2} P$.

*Variazioni.*

I. Osservando la fig. 9, $AF > AD$...dunque $\frac{1}{2} P > 45°...P > 90°$.

Il cerchio orario adunque non sarà verticale avanti dell'ora sesta dopo del sorgere o prima del tramontare.

Ciò avviene, perchè $\cos E$ è una frazione. Intanto

II. $\cos E = 1$ cioè all'equatore... $\frac{1}{2} P = 45°...P = 90°$ cioè sarà verticale il circolo dell'ora sesta id est il meridiano.

III. $\cos E = 0$...cioè al polo...$\text{sen} \frac{1}{2} P = \infty$, cioè non vi sarà circolo orario verticale.

IV. $E = 45°$; $\text{sen} \frac{1}{2} P = \frac{\cos 45°}{\cos 45°} = 1 ... \frac{1}{2} P = 90° ... P = 180°$ cioè il cerchio orario sarà verticale alle ore dodici dopo del sorgere e prima del tramontare.

V. $\cos E < \cos 45°...\text{sen} \frac{1}{2} P > 1$. Dunque non vi sarà circolo verticale dopo il grado $45°$ di elevazione polare, come si conchiuse alla variazione IV del n. 20.

# Riflessioni

## *sul verticale italiano e babilonese.*

22. Sarebbe cosa ottima, ed all' astronomia, ed agli usi civili utilissima, se nelle grandi chiese, dove non si può segnare una lunga meridiana, si segnasse, permettendolo il luogo, la sezione del verticale italiano oppure babilonese.

23. Queste sezioni sono facilissime a descriversi, ed i loro vantaggi sono degni dell'attenzione de' dotti.

1. Queste sezioni sono incontrate dal sole in un'ora determinata e costante in tutto il corso dell'anno, qualunque sia l'elevazione del sole, nè soffre il sole ad arrivarvi gli acceleramenti o i ritardi della refrazione. Il verticale italiano ha per gl'italiani un vantaggio sulla stessa meridiana, perchè a rettificare l'orologio all'italiana non è necessario sapere l'ora ed i minuti del mezzogiorno.

2. Come la meridiana fa conoscere la declinazione del sole; così i verticali italiano e babilonese fanno conoscere l'ampiezza ortiva ed occidua. Le osservazioni comparate accrescono lume alla scienza. Se nelle specole ci fosse strumento di passaggi per questi verticali, come vi è per lo passaggio dal meridiano, il calcolo astronomico bascrebbe sopra osservazioni che si correggono a vicenda.

METODO

*per descrivere la sezione del verticale italiano, ovvero del babilonese.*

24. Nell'esame II (n. 19 I) si ha *sen* $D = tang\ E$, cioè che il seno della deviazione dell'orario verticale uguaglia la tangente dell'elevazione del polo, dunque

1. Si traccia (*fig. 15*) dapprima una meridiana esattissima *PM*, e dal piede *P* del gnomone si tira la normale *est ovest*: sarà questa la sezione del primo verticale. *Fig. 15.*

2. Dalla parte ovest si prenda una porzione qualunque *PL*, e su di lei come diametro si costruisca un semicircolo *PAL* protuberante a nord. *PL* rappresenti l'indice $= 1$.

3. Si formi al punto *L* l'angolo *PLO* uguale ad *E* elevazione del polo: sarà $PO = tang\ E$.

4. Con un archetto *OA* si porti *PO* ad incontrare il semicircolo *PAL*: sarà *PAV* la sezione ricercata del verticale italiano.

*Dimostrazione.* $OPA + APL = 90°$; $APL + PLA = 90°$; dunque $OPA = PLA$; ma *PLA* ha per seno $PA = PO = tang\ E$; dunque *sen* $OPA = tang\ E$.... *OPA* è la deviazione *D* ricercata.

La stessa costruzione fatta dal lato *est* darebbe la sezione del verticale babilonese.

25. Ma a quale ora passa il sole per questi verticali?

*Costruzione.* (*) 1. Sia *PO* (*fig. 25*) la meridiana, *PL* *Fig. 25.*

(*) Quando mi venne l'idea di aggiungere queste riflessioni sul cir-

l'indice$=1$, $PO=tang\ E$, $BA$ che passa per $O$ la sezione dell'equatore, $LO$ il raggio equatoriale $=\frac{1}{\cos E}$ Qui l'angolo orario italiano $P=DAT$ (*fig. 14*) $=90°+ODA$. Chiamo $p$ l'angolo $ODA$; onde $P=90°+p$ (Esame II § 21 I).

2. Si porti (*fig. 25*) $PL$ in $PB$, siccome dell'angolo $PBO$ il seno è $PO=tang\ E$, perciò $PBO=OPA$, dunque $BPA$ è angolo retto, e $PO$ è perpendicolare sull'ipotenusa; onde $BO=\sqrt{1-tang^2 E}$; $OA=\frac{tang^2 E}{\sqrt{1-tang^2 E}}$.

26. *Calcolo*. Nel triangolo $ODA$ (*fig. 14*) si ha

$$OD:OA=\frac{1}{\cos E}:\frac{tang^2 E}{\sqrt{1-tang^2 E}}=1:tang\ p\ldots$$

dunque $tang\ p=\frac{\cos E\ tang^2 E}{\sqrt{1-tang^2 E}}=\frac{sen\ E.\ tang\ E}{\sqrt{1-tang^2 E}}$ (1).

Si trasformi $\sqrt{1-tang^2 E}=\sqrt{\frac{\cos^2 E-sen^2 E}{\cos^2 E}}$

$$=\frac{\sqrt{\cos 2E}}{\cos E}\ \text{onde}$$

$$tang\ p=\frac{\cos E.\ sen\ E.\ tang\ E}{\sqrt{\cos 2E}}=\frac{sen^2 E}{\sqrt{\cos 2E}}\ (A).$$

27. Se si volesse il *sen p*, si avrebbe trovando la *sec p*, e dividendo la tangente per la secante. Que-

colo orario verticale, i rami erano incisi; nè vi fu luogo ad inserire che la figura 15; non essendo però questa sufficiente alle dimostrazioni sono stato costretto a servirmi delle figure 14 e 25 combinandole alla meglio.

sto risultato è elegantissimo, perchè dà $sen p = tang^2 E$: valore di facilissima costruzione.

La (1) dà $tang^2 p = \frac{sen^2 E . tang^2 E}{1 - tang^2 E}$

ma $1 + tang^2 = sec^2$; onde $sec^2 p = 1 + \frac{sen^2 E . tang^2 E}{1 - tang^2 E}$

$$= \frac{1 - tang^2 E + sen^2 E . tang^2 E}{1 - tang^2 E} = \frac{1 - tang^2 E (1 - sen^2 E)}{1 - tang^2 E}$$

$$= \frac{1 - cos^2 E \, tang^2 E}{1 - tang^2 E} = \frac{1 - sen^2 E}{1 - tang^2 E} = \frac{cos^2 E}{1 - tang^2 E}$$

dunque $sec\ p = \frac{cos E}{\sqrt{1 - tang^2 E}}$ (2): dividendo la (1) per la (2) sparisce il fattore comune $\sqrt{1 - tang^2 E}$

dunque $\frac{tang\ p}{sec\ p} = sen\ p = \frac{sen E \, tang E}{cos E} = tang^2 E$ (B).

28. Lo stesso valore si ha dalla formola II § 19 dell' Esame II.

$Sen \frac{1}{2} P = \frac{cos\ 45^\circ}{cos E}$, e siccome $P = 90^\circ + p \ldots - cos P = sen\ p$. Or

$sen^2 \frac{1}{2} P = \frac{cos^2\ 45^\circ}{cos^2 E} = \frac{1}{2 cos^2 E}$; onde $cos^2 \frac{1}{2} P$

$= 1 - \frac{1}{2 cos^2 E} = \frac{2 cos^2 E - 1}{2 cos^2 E}$: ma $cos^2 \frac{1}{2} P - sen^2 \frac{1}{2} P$

$= cos P = \frac{2 cos^2 E - 2}{2 cos^2 E} = \frac{cos^2 E - 1}{cos^2 E}$: onde

$- cos P = \frac{1 - cos^2 E}{cos^2 E} = \frac{sen^2 E}{cos^2 E} = tang^2 E \ldots$ dunque $sen\ p = tang^2 E$.

In Pal. $E = 38^\circ\ 6',\ 44''$.

*Applicazione.*

(A) $Log.\ tang\ p = \begin{matrix} 2\ l\ sen\ E = 9.\ 58086 \\ \frac{1}{2}\ l'\ cos\ 2\ E = 0.\ 31160 \end{matrix}$

$\overline{9.\ 89246}$

(B) $Log.\ sen\ p = 2\ l\ tang\ E = 9.\ 78912$

$p = 37°,\ 58'\ 40''$ circa, in tempo $2^h,\ 31'\ 54''\ 40'''$, che sottratte da $17^h,\ 30'$ danno $14^h,\ 58',\ 5'',\ 20'''$. La refrazione occidua allunga il giorno di $3'$, dunque il sole è nel verticale italiano a $14^h,\ 55',\ 5'',\ 20'''$.

*Costruzione.*

29. Il valore $sen\ p = tang^2\ E$ si costruisce facilmente così

1. Al punto $O$ (*fig. 15*) si formi una normale ad $OL$, sia questa $OB$, che incontri la linea *est ovest* in $B$: sarà $PB = tang^2\ E$. Giacchè per l'angolo retto $LOB$, e la normale $OP$ sopra l'ipotenusa $BL$, avremo $PB = \frac{\overline{PO}^2}{PL}$: ma $PL = 1$, $PO = tang\ E$, dunque $PB = tang^2\ E$. Posto ciò

2. Si apra il compasso da $P$ in $B$, è fatto centro in $P$ s'incontri in $C$ il circolo $PAL$, sarà $PC = PB$. Si tiri $CL$, e $PC$, sarà $OPC = p$.

*Dimostrazione.* $OPC + CPL = CPL + PLC$; dunque $OPC = PLC$: ma di $PLC$ il seno $= PB = tang^2\ E$; dunque $sen\ OPC = tang^2\ E$.

## AVVERTIMENTI.

30. Volendo applicare alla pratica le teorie analizzate in questo Esame II sulla deviazione delle sezioni orarie, e sull' inclinazione de' loro cerchi è necessario avvertire alcune cose

I. Le costruzioni teoriche nella fig. 5 sono fatte sull' orizzonte *OEHF*, che passa pel centro *C* della sfera, e perciò dicesi orizzonte razionale. Intanto il vertice dell' indice si suppone nel centro della sfera. — Le costruzioni pratiche si fanno sul piano del quadrante che passa per lo piede dell' indice, e dicesi orizzonte visibile. I due orizzonti sono paralleli, e distano fra loro tutta l'altezza dell'indice, che si prende per unità. Posto ciò

II. Quantunque la sezione oraria *AB* (*fig. 5*) nel piano *OEHF* passi per *C* centro della sfera : pure per causa dell'inclinazione del suo circolo orario sull' orizzonte il suo incontro nel piano del quadrante non passa sempre per lo piede dell'indice, ma si allontana da un lato o dall'altro pel valore $\mp \cot I$ secondo che $I$ e maggiore o minore di $90^\circ$. Le sezioni vanno al lato opposto del cerchio orario, se questo è ad oriente, quelle vanno ad occidente, e viceversa. Quando $I = 90^\circ$ la sezione passa per lo piede dell' indice, perchè $\cot I = 0$.

III. Da questo spostamento avviene, che le linee orarie non toccano tutte la meridiana, se non si prolungano oltre la misura loro dovuta : tutte però toccano l' equinoziale. È bene dunque conoscere l'angolo

che fanno con questa. Se colla meridiana fanno l' angolo $D$, coll' equinoziale fanno l' angolo $90° - D$.

IV. A causa della deviazione le linee orarie, come si notò al § 12, piegano ad est o ad ovest. Le italiane al capo che guarda sud incominciando dall'ora 23 piegano sempre più ad est, ed al capo opposto che guarda nord o piegano sempre più ad ovest. Le babilonesi fanno tutto all'opposto. A meglio persuadersi è bene guardare le linee orarie italiane segnate nella figura grande *Tav. III.*

**ESAME III.**

*Punti equinoziali delle sezioni orarie.*

31. Tutte le sezioni orarie devono avere un punto nell'equinoziale, perchè il punto $E'$ dell'orizzonte mobile (*fig.5*) accompagna sempre nel suo giro l'equatore.

32. *Lemma.* I circoli massimi si tagliano in due punti diametralmente opposti. Ciò è chiaro. Dunque ogni circolo orario tocca l' equatore in due punti, dei quali se uno è sopra, l' altro sarà sotto l' orizzonte.

*Divisione dell' equatore.*

33. L' arco dell' equatore contandosi dall'orizzonte è complemento di quello che contasi dal meridiano. Or
*Fig. 10.* gli angoli orarî contandosi (*fig. 10*) da $OC$ meridiano sono $OCE$, dunque contandosi dall'orizzonte saranno $OEC$ (*nelle ore pomeridiane il punto E trovasi verso A*

*ad oriente, e nelle pomeridiane verso B ad occidente)* $CE$ nel primo caso è secante $OCE$, nel secondo cosecante $OEC$. Chiamando $P$ gli angoli orarî, sarà dal meridiano $P = OCE$, dall'orizzonte $P = OEC$ : onde $OE = tang\,P$ nel primo caso, e nel secondo $= cot\,P$, così $CE = sec\,P$, ovvero $cosec.\,P$; sotto il raggio $OC$.

*Avvertimenti.*

I. *Per le ore italiane.* Le ore italiane hanno per limite finale il lembo $OEB$ *(fig. 1)* dell' orizzonte ad occidente, onde il loro angolo $P$ è uguale all' arco dell' equatore, che resta a percorrersi per tramontare. Dal tramonto dunque le ore italiane possono considerarsi come retrograde. Il loro angolo $OEC$, finchè non è maggiore di $180°$, ha la sua apertura che guarda $B$ *(fig. 10)* ad occidente. Da principio il vertice $E$ si trova ad est dal lato di $A$, e l' angolo $E = 0°$, poscia va crescendo, arrivato in $O$ diviene $= 90°$ cioè alle ore sei prima del tramonto. Da $O$ avanzandosi il punto $E$ verso $B$ ad ovest l' angolo cresce ancora sino a $180°$, cioè sino alle ore dodici prima del tramonto, dove la secante da $C$ diviene parallela ad $AB$: ma crescendo oltre il grado $180°$, la secante da $C$ deve prolungarsi indietro verso $A$ per incontrare l'equinoziale. Ciò significa che il punto $E$ equatoriale dell' arco orario $> 180°$ è sotto l'orizzonte, ma è sopra l' $E'$ diametralmente opposto, dove la secante oraria prolungandosi negativamente va ad incontrarlo.

II. *Per le ore babilonesi.* Le ore babilonesi hanno

per limite iniziale il lembo orientale *OAB* (*fig.* 1) dell' orizzonte, d' onde sono progressive. Il loro angolo *P* è misurato dall' arco dell'equatore compreso fra il circolo orario e l'orizzonte. L'apertura del loro angolo in *E* (*fig.* 10) guarda ad est verso *A*. L'*E* da principio è ad ovest, e $P = 0°$: cresce, ed in *O* è ugnale a 90° alle ore sei: si avanza verso *A*, sinchè divenga uguale a 180° all'ore dodici. Se cresce ancora, la secante diviene negativa, e per incontrare l' equinoziale deve prolungarsi indietro. Ciò significa, come sopra, che la sezione oraria corrispondente incontrerebbe ivi l' equinoziale se si prolungasse.

34. Per eseguire la divisione dell'equatore si guardi
*Fig. 11.* la (*fig.* 11).

Sia *CSM* il triangolo polare: $PCS = PSM$ l' elevazione *E* del polo, $SP = 1$ l' indice: $SM = MS'$ il raggio dell'equatore $= \frac{1}{\cos E}$: *CS'* la meridiana, *AB* l' equinoziale, *DMF* l' equatore, *Hh* il limite per dividere l' equatore dall' orizzonte.

35. Per le ore italiane civili si prendano da *D* nell' arco *DM* 7° 30′ per l' ora $23^h$; indi si aggiungono 15° per l' ora $22^h$, e così di seguito: in tal modo avremo i gradi dell' equatore secondo le ore, come dalla tavola annessa.

| Angoli *E* | | | |
|---|---|---|---|
| h | | ° | ′ |
| 23 | + | 7 | 30 |
| 22 | + | 22 | 30 |
| 21 | + | 37 | 30 |
| 20 | + | 52 | 30 |
| 19 | + | 67 | 30 |
| 18 | + | 82 | 30 |
| 17 | + | 97 | 30 |
| 16 | + | 112 | 30 |
| 15 | + | 127 | 30 |
| 14 | + | 142 | 30 |
| 13 | + | 157 | 30 |
| 12 | + | 172 | 30 |
| 11 | − | 7 | 30 |
| 10 | − | 22 | 30 |
| 9 | − | 37 | 30 |

36. Le ore 9, 10, 11 hanno i loro punti $E'$ negativi, perchè l'$E$ del loro circolo orario è sotto l'orizzonte. La sezione di queste ore prolungata si dirige ai punti $E$ delle ore *21*, *22*, *23*.

L'ora $11^h$, $30'$ è parallela all'equinoziale, e taglia la meridiana $CS'$ a metà di $CM$ tra il punto equinoziale ed il centro del quadrante.

37. Per le ore babilonesi la divisione dell'equatore s'incomincia da $F$ progredendo di $15°$ in $15°$. L'ora sesta passa per $M$, e la dodicesima è parallela all'equatore a distanza $\frac{2}{3}$ $CM$, come sarà dimostrato. Le ore *XIII* e *XIV* si dirigono ai punti $E$ delle ore *I* e *II*.

## ESAME IV.

*De' circoli bisecanti gli angoli d'inclinazione, e del verticale comune.*

38. L'angolo $OAO'$ (*fig.* *12*) è bisecato dal meridiano $AP$; $OAO' = I$, dunque chiamo $AP$ meridiano bisecante $I$. *Fig. 12.*

Siavi un arco $AV'B$, che bisechi l'angolo $O'AE = I'$; chiamerollo arco bisecante $I'$.

39. Se gira quest'arco $AV'B$ intorno ad $AB$, il punto $V'$ descrive un arco verticale, il quale passa pel $V$ di $AO'B$, ed anche pel vertice $V''$ (dovunque egli sia) di $AP$, come ancora pel zenit del meridiano $OPD$ : chiamerollo verticale comune.

40. Esaminiamo le loro sezioni

I. Nel centro $C$ della sfera i tre circoli $AP$, $AO'B$,

$AV'B$ hanno comune la sezione $AB$: così avviene nell'orizzonte razionale $OEHF$, che si considera passare pel vertice dell' indice.

II. Siccome i tre circoli sono diversamente inclinati sull' orizzonte razionale, perciò la loro sezione ricevuta sul piano dell'orologio (orizzonte visibile che passa per lo piede dell' indice) si scioglie in tre sezioni parallele.

III. La sezione del verticale comune 1° passa pel vertice e pel piede dell' indice; 2° è perpendicolare ad $AB$ nell'orizzonte razionale; 3° resta perpendicolare alle tre sezioni parallele in cui si scioglie $AB$ (II) quando si projetta nell' orizzonte visibile (piano dell' orologio).

IV. Siccome le tre sezioni fanno colla meridiana gli angoli $D$, così la sezione del verticale fa lo stesso angolo $D$ colla linea equinoziale.

V. Siccome $OAO' + O'AE = 180°$, perciò $PAO' = \frac{1}{2} OAO'$ più $O'AV' = \frac{1}{2} O'AE$ uguali $90°$; dunque i due bisecanti $AP$ ed $AV'B$ fanno angolo retto in $A$. Per la stessa ragione i raggi che vanno ai vertici $V'$, $V''$ di $AV'B$, ed $AP$ fanno angolo retto nel centro $C$.

41. *Il punto $V'$ dell' arco $AV'B$ è nell' equatore.* Imperciocchè $AV'$ è perpendicolare ad $AP$ (V) ed è uguale a $90°$ (§ 14 I): dunque $V'$ è il polo di $AP$. Or $AP$ è un meridiano, ed il polo di ogni meridiano è nell' equatore: dunque $V'$ è nell' equatore. Da ciò si deduce che la projezione di $V'$ è nell' equinoziale, onde il raggio $V'C$ prolungato in giù ad incontrare l' orizzonte visibile toccherà l' equinoziale.

42. Chiamando $P$ l'arco dell'equatore $E'V'E$ compreso fra l'orizzonte mobile $AO'B$, ed il fermo $OEH$, sarà $V'$ a metà di $E'V'E$ : onde $E'V' = V'E = \frac{1}{2} P$.

Ciò si dimostra concependo due triangoli sferici $AV'E$, $BE'V'$, che si troveranno fra loro uguali, imperciocchè fra lati a due a due uguali comprendono angoli uguali cioè

$BV' = AV' = 90°$; $BE' = AE$, perchè $BE' = BV - VE'$ $= AV - AO' = OE - OA = AE$...gli angoli compresi $V'BE'$, $V'AE$ sono uguali per l'angolo $O'AE$ $= E'BH$ bisecato.

Dunque le basi opposte $E'V'$, $V'E$ sono uguali.

## COROLLARI

I. Il punto $V'$ projettato nell' equinoziale col prolungamento (§ 41) del raggio $V'C$ l'incontrerà in quel punto, dove l' angolo orario sarebbe $= \frac{1}{2} P$.

II. Il punto $V'$ è comune alla sezione del verticale, e del bisecante $I'$. Se dunque l' $E'$ del circolo orario $AO'B$ riferito all' equinoziale dista dalla meridiana (§ 33) *cotang* $P$, il punto $V'$ del verticale e del bisecante disterà dalla meridiana *cotang* $\frac{1}{2} P =$ *cotang* $P$ $+$ *cosec* $P$: quantità prese, come è di ragione sotto il raggio dell' equatore $\frac{1}{\cos E}$.

III. Il verticale comune sin qui ha due punti, uno nel piede $P$ (*fig. 11*) dell' indice nella meridiana, e l' altro nell' equinoziale a distanza dalla meridiana *cotang* $P +$ *cosec* $P$....raggio $\frac{1}{\cos E}$. Per questi due

punti si dirige la sua sezione. Quella del bisecante $I'$ non ha altro uso, nè è necessaria a disegnarsi.

43. Il punto equatoriale dell' arco bisecante $AP$ dista dal $V'$ dal bisecante $I'$ per un arco di $90°$ a causa dell' angolo retto $PAV'$ (§ 40 V) $= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I'$: di più è dall'altra parte dell'arco orario: dunque nell' equinoziale si trova dall' altro lato della meridiana a distanza $tang\ \frac{1}{2} P$, che riferendosi all'$E$ dell'arco orario sarà a distanza $cotang\ P - cosec\ P$...raggio $\frac{1}{\cos E}$.

Si notino bene queste due valori $cot\ P + cosec\ P$, e $cot\ P - cosec\ P$, perchè nella loro costruzione consiste la pratica della nuova teoria.

*Corollario*. La sezione del meridiano $AP$ ha già due punti fissi, il centro del quadrante come meridiano, ed il punto dell' equinoziale già ritrovato.

44. La sezione del verticale (comune agli archi che consideriamo) è perpendicolare (§ 40 III 3) alla sezione del bisecante $AP$. Or questo loro angolo retto ha due punti fissi ne' due suoi lati, uno in $P$ piede dell'indice e l'altro in $C$ centro del quadrante : dunque il vertice di quest' angolo fa le sue variazioni in una circonferenza descritta sopra $PC = cotang\ E$, elemento del triangolo polare, che perciò chiamerolla circolo polare. Questo punto d' intersezione rassicura e corregge le due sezioni quando si descrivono.

45. Chiamo la sezione del verticale comune raggio vettore delle tre sezioni, cioè 1° del circolo orario, 2° del bisecante $I'$, 3° del meridiano $AP$, bisecante $I$. Il raggio vettore di ogni sezione è la normale tirata dal piede dell' indice sino ad incontrarla.

46. Il raggio vettore incontra da un capo il bisecante *I'* sempre nell'equinoziale, dunque questo punto nelle sue variazioni descrive una linea retta: dall'altro capo incontra la sezione *AP* o bisecante *I* sempre nel circolo polare, dunque descrive nelle sue variazioni un circolo: finalmente nell' intermedio incontra la sezione oraria in punti variabili per deviazioni ed inclinazioni del piano (orizzonte mobile), e descrive una curva che appresso analizzeremo nella terza parte.

## ESAME V.

*Punto della sezione oraria nel raggio vettore.*

Resta a determinarsi il punto, dove la sezione oraria incontra il raggio vettore. Questo dipende dagli angoli d' inclinazione *I* ed *I'*.

## ANALEMMA

47. Sia *AVD* (*fig.12*) il piano del verticale comune; *Fig. 12.*
*AD* la sua sezione coll'orizzonte razionale: il centro *I* (vertice dell' indice *PI*). Sia *BK* la sezione dell'orizzonte visibile : *IV* la sezione dell'arco orario, esprima l' arco *AV* la sua inclinazione *I* sull' orizzonte razionale, e l' arco *DV* l' inclinazione *I'* dall' altro lato. Si bisechino questi due archi colle *IV' IV''* che saranno le sezioni de' due bisecanti *I*, ed *I'* (§ 38). Si prolungano le tre sezioni sino all'incontro di *BK*. Io asserisco che la sezione oraria *IV* incontra la *BK* in *F* a metà di *BK*, onde $BF = FK$.

48. Imperocchè gli angoli $V''ID$, $IBF$ sono uguali fra loro per le parallele, $AD$, $BK$, ed ugnali $\frac{1}{2} I'$, come ancora $VIV''$, $BIF$ opposti al vertice ed uguali $\frac{1}{2} I'$: dunque il triangolo $BIF$ è isoscele, e $BF = FI$. Inoltre per le stesse ragioni gli angoli $AIV' = FKI = \frac{1}{2} I$, ed $V'IV = FIK = \frac{1}{2} I$: dunque il triangolo $IFK$ è anche isoscele, onde $FK = FI$...perciò $BF = FK$.

49. Con ciò la sezione oraria è determinata sempre meglio dagli angoli d' inclinazione; mentre non solo ha 1° un punto nell' equinoziale a distanza dalla meridiana *cotang* $P$ $\left(\text{del raggio dell' equatore } \frac{1}{\cos E}\right)$ (§ 33); non solo 2° è parallela alla sezione del meridiano $AP$ o bisecante $I$ (§ 40 II) già determinata di posizione (§ 43); non solo 3° è perpendicolare alla sezione del verticale comune (§ 40 III 3) ossia raggio vettore (§ 45) già determinato (§ 41 coroll. III ec.) ma ancora 4° divide il raggio vettore $BK$ compreso fra l'equinoziale ed il circolo polare in $F$ in due parti uguali.

50. Quando dunque il raggio vettore $BK$ è nella meridiana, allora il punto $B$ è nell' intersezione $M$ fig. 13 dell' equinoziale, ed il punto $K$ è nel centro $C$ del quadrante, onde $F$ per cui passa l'oraria è a metà di tal distanza, cioè a $\frac{1}{2}$ $CM$ (§ 36, 37).

Ciò avviene quando $\frac{1}{2} P = 90°$...$P = 180°$...cioè alle ore 12 dopo del sorgere, o prima del tramontare, che nelle ore italiane civili corrisponde alle ore $11^h$, $30'$.

## RAPPORTI

*Degli angoli d'inclinazione I, ed I' coll'angolo orario P.*

51. I valori del raggio vettore *IF* dell' oraria, *PK* del bisecante *I*, *PB* del bisecante *I'* dipendono dagli angoli d' inclinazione.

Riguardando la fig. 12.

$$IFP = VID = I' = 180^\circ - I, \text{ onde } PF = \cot I' = -\cot I$$

$$IKP = V'IA = \tfrac{1}{2} I = 90^\circ - \tfrac{1}{2} I', PK \begin{cases} = \cot \tfrac{1}{2} I = \cot I + \operatorname{cosec} I \\ = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} I' = \cot I' - \operatorname{cosec} I' \end{cases}$$

$$IBP = V''ID = \tfrac{1}{2} I' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} I, PB \begin{cases} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} I = \cot I - \operatorname{cosec} I \\ = \cot \tfrac{1}{2} I' = \cot I' + \operatorname{cosec} I' \end{cases}$$

Richiamando i rapporti precedenti de' punti equinoziali delle tre sezioni per causa dagli angoli orari *P*: si ha: distanza dalla meridiana del

Punto dell'oraria ................. $= \cot P = -\cot (180^\circ - P)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{del bisecante } I \ldots \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P = \cot P - \operatorname{cosec} P \\ \text{del bisecante } I' \ldots \cot \tfrac{1}{2} P = \cot P + \operatorname{cosec} P \end{array}\right\} R = \frac{1}{\cos E}$$

52. Se si mettesse $P' = 180^\circ - P$, si avrebbero altri due rapporti cioè

pel bisecante *I*; $\cot \tfrac{1}{2} P' = \cot P' + \operatorname{cosec} P'$,

e pel bisecante *I* $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P' = \cot P' - \operatorname{cosec} P'$.

Così si avrebbero quattro rapporti per gli angoli orarî, come se ne ebbero quattro per gli angoli d'inclinazione. Quelli di *P* uguali a quelli di *I'*, e quelli di *P'* uguali a quelli di *I*.

53. Questi rapporti identici nascono dall'essere il raggio vettore e l' equinoziale uniti ad angolo *D* (deviazione) (§ 40 IV) e le due sezioni dell'oraria e del bisecante *I* basi parallele fra loro e perpendicolari al

raggio vettore, la prima in $F$ a metà di $BK$, e l'altra alla fine nel punto $K$.

*Variazioni del punto F.*

54. Il punto $F$ ora si accosta all'equinoziale verso $B$, ora passa all' altro lato verso $K$, ora si confonde con $P$.

1.° Quando $I > 90°$, e *cotang* $I$ negativa, ovvero $I' < 90°$, e *cotang* $I'$ positiva, allora $F$ è da $P$ verso $B$.

2.° Quando $I < 90°$, e *cotang* $I$ positiva, ovvero $I' > 90°$ e *cotang* $I'$ negativa, allora $F$ è da $P$ verso $K$.

3.° Quando $I = 90° \ldots I' = 90° \ldots$ e *cotang* $I$ o $I' = 0$, allora $F$ è in $P$.

4.° Quando $K$ si confonde con $P$, allora $PB = \infty$; pure $F$ è ad un $\frac{1}{2}$ $PB$.

*Uso degli angoli P.*

55. Ritrovati nell' equinoziale i punti $E$ di ogni oraria distanti dalla meridiana *cotang P:* si prende la cosecante $P$ ed aggiungendola con un giro di compasso si ha *cot* $P$ + *cosec* $P$ pel punto del raggio vettore, e sottraendola con un giro in senso contrario si ha *cot* $P$ — *cosec* $P$ pel punto della sezione del meridiano bisecante $I$. Ad intendere queste cose con maggiore evidenza passiamo a considerare nell'

## ESAME VI

*La stessa teoria per costruzione lineare.*

56. *Preparazioni*. Sia $CLO$ (*fig. 14*) il triangolo polare, $PCL = PLO$ l'elevazione $E$ del polo, $C$ il centro del quadrante, $O$ il punto equinoziale: $PL = 1$ la lunghezza dell' indice : $PC = \cot E$ diametro del circolo polare $PKC$; $PO = \tang E$, $CO = \frac{1}{\sen E . \cos E}$ meridiana; $LC = \frac{1}{\sen E}$ asse del mondo: $LO = \frac{1}{\cos E}$ raggio dell'equatore: $NL$ la sezione del primo verticale; $BA$ la sezione dell' equatore $ROS$, il di cui raggio $OD = LO = \frac{1}{\cos E}$. *Fig. 14.*

### Costruzione piana

*Per gli angoli di deviazione.*

57. Sia $E$ il punto dell' oraria nell'equinoziale: sarà $DEO$ l' angolo orario $P$ : $OE = \frac{\cot P}{\cos E} \dots DE = \frac{\operatorname{cosec} P}{\cos E}$ cioè sotto il raggio $DO = \frac{1}{\cos E}$.

1. Si apra il compasso, e si porti $ED$ a sinistra in $EB$, ed a destra in $EA$ : sarà $B$ (nelle ore italiane) il punto del raggio vettore $BPK$, ed $A$ quello della sezione $CA$ del meridiano bisecante. (Per le ore babilonesi si costruirebbe la figura dall'altro lato e viceversa.

Osservo intanto che $OB = \frac{\cot \frac{1}{2} P}{\cos E}$, ed $OA = \frac{\tang \frac{1}{2} P}{\cos E}$

2. Si tiri l'oraria *GM* perpendicolare al raggio vettore in *F*, ed incontra la meridiana in *M*. Sarà

I. L'angolo *D* di deviazione $FMP = OBP$, perchè compresi fra lati a due a due perpendicolari ne' due triangoli rettangoli *PBO*....*PMF*.

58. *Proposizione*. Se gli angoli *PMF*, ed *OCA* dentro le linee *FM*, e *CA*, alterni interni rispetto alla secante *CM* sono uguali, allora le due linee *FM*, *CA* saranno parallele; e siccome la prima è perpendicolare al raggio vettore *BK* nel punto *F*, così la seconda gli sarà perpendicolare nel punto *K*.

*Si provi l'uguaglianza degli angoli.*

$FMP = OBF$ (§ 57 I): ma anche $OCA = OBP$; infatti i due triangoli rettangoli *BOD*, *ODA* simili per gli angoli $OBD = ODA = \frac{1}{2} P$
danno $BO : OD = OD : OA$, ed i triangoli simili *CLO*, *LPO* danno

$CO : OL = OL : PO$, ma $OD = OL$, onde

$BO : CO = PO : OA$ dunque i due triangoli rettangoli *POB*, *OCA* hanno i due cateti proporzionali, e perciò gli angoli *PBO*, *OCA* sono uguali: quindi $OCA = FMP$, e le linee *FM*, *CA* sono parallele (§ 40 II), e come la prima è a *BK* perpendicolare in *F*, così la seconda le è perpendicolare in *K*. (§ 53).

Si prova trigometricamente che i tre angoli proposti

hanno il valore (Esame II § 15 form. I) dell'angolo $D$, secondo la formola $tang\ D = tang\ \frac{1}{2} P\ sen\ E$. Veggiamolo dunque

I. dell'angolo $PBO$; di cui $BO = \frac{cot\ \frac{1}{2} P}{cos\ E} \ldots PO = tang\, E$

$$BO : OP = \frac{cot\ \frac{1}{2} P}{cos\ E} : tang\, E = 1 : tang\ PBO$$

$$= \frac{cos\ E.\ tang\ E}{cot\ \frac{1}{2} P} = tang\ \frac{1}{2} P\ sen\ E$$

II. dell'angolo $OCA$, di cui $CO = \frac{1}{sen\ E.\ cos\ E}$

$$OA = \frac{tang\ \frac{1}{2} P}{cos\ E};\ CO : OA = \frac{1}{sen\ E.\ cos\ E} : \frac{tang\ \frac{1}{2} P}{cos\ E}$$

$= 1 : tang\ OCA = tang\ \frac{1}{2} P\ sen\ E$

III. dell'angolo $OME$, di cui $OM = \frac{cot\ \frac{1}{2} P\, cot\, P}{cos\ E.\ sen\ E}$

perchè i due triangoli simili $POB, EOM$ danno $OP : OE = OB : OM$ cioè $tang\ E : \frac{cot\ P}{cos\ E} = \frac{cot\ \frac{1}{2} P}{cos\ E} : OM = \frac{cot\ \frac{1}{2} P.\ cot\ P}{cos^2 E.\, tang\ E} = \frac{cot\ \frac{1}{2} P.\ cot\ P}{cos\ E.\ sen\ E}$; di più $OE$ come avanti $= \frac{cot\ P}{cos\ P}$ onde

$$OM : OE = \frac{cot\ \frac{1}{2} P.\, cot\ P}{cos\ E.\ sen\ E} : \frac{cot\ P}{cos\, E} = 1 : tang\ OME$$

$= tang\ \frac{1}{2} P.\ sen\ E.$

COROLLARI

I. Le linee $GM$, $CA$, sono parallele fra loro, e siccome la prima è perpendicolare a $BK$ per costruzione nel punto $F$, così la seconda deve essere per conseguenza perpendicolare nel punto $K$. (§ 40 II) (§ 53).

II. L'angolo *PKC* è retto, perciò essendo fissi i punti *P* e *C* de' lati, il punto del vertice *K* fa le sue variazioni nella circonferenza *PKC* formata sul diametro *PK* (§ 44).

III. L'equinoziale *BA* è divisa in *E* in due parti uguali per costruzione, perciò le parallele *GM*, *CA* dividono *BK* in due parti uguali in *F* (§ 49).

*Variazioni del punto F.*

I. Giacchè (III) $BF = FK$, perciò $BF = FP + PK$ onde $BF > FP$: se dunque 1° $PK < PB$, onde se *PK* ha un valore finito, allora il punto *F* è più vicino a *P* che a *B*, e perciò più vicino a *G* che ad *E*: ma se $PK = 0$, allora *F* si trova a metà di *PB* (quantunque infinito) ed a metà di $GE =$ metà di *PO* uguale $\frac{1}{2}$ *tang E*. 2° Quando $PK = PB$, allora *F* passa nel punto *P*. 3° Quando $PK > PB$, allora *F* passa dall' altro lato verso *K*. 4° Quando $PK = PC$ nella meridiana allora *F* è tra *P* e *C* a metà di *OC* con cui si confonde *BK* (§ 49, 50).

II. La via del punto *F* nel piano dell' orologio è una curva che a distanza infinita parte da un asintoto parallelo all'equinoziale posto a metà di $PO = \frac{1}{2}$ *tang E*, progredisce accostandosi a *P*, lo tocca e l'oltrepassa girando per tagliare la meridiana a $\frac{1}{2}$ *CO*, donde ripiega dall' altro lato, e ritorna in *P*, per progredire simmetricamente a distanza infinita accostandosi al capo opposto dell' asintoto da cui prese cominciamento.

Chiamerò questa curva *orizontoide*, perchè generata

da *F* projezione del vertice dell'orizzonte mobile, come fra poco vedremo. Della natura e delle affezioni dell' *orizzontoide* darò un' analisi completa nella terza parte.

COSTRUZIONE SOLIDA

*Per gli angoli d' inclinazione.*

60. L'indice *PL* si trasporti (*fig. 14*) in *PI* normale a *BK* in *P*, e si consideri la figura come rilevata; avremo FIG. 14.

I. *LO* uguale per costruzione *OD*, ora uguale *IO*, e perciò

II. $AD = IA \ldots ED = IE \ldots BD = IB$: perchè come *D* è il centro dell'equatore nella figura piana, così *I* fa le stesse funzioni nella figura solida rispetto alla stessa equinoziale *BA*.

III. *CL* asse del mondo diviene uguale *IC*, quantunque la figura sulla carta non possa mostrarlo.

IV. Le linee *IB*, *IE*, *IO*, *IA* nel piano dell'equatore rilevato formano angoli retti con *IC* asse del mondo.

V. Le linee *BE*, *IE*, *EA* sono uguali ad *ED*, e perciò uguali fra loro, ed in conseguenza l' angolo $BIA = BDA$ è retto.

VI. La linea *EF* sezione del piano orario (orizzonte mobile *FIE*) è perpendicolare a *BK* sezione del piano *BIK*, che rappresenta il verticale comune. Or *EF* ha il punto *E* equidistante da *I*, e da *B*: dunque *F* sarà equidistante dai medesimi punti, onde $FI = FB$: ma $FB = FK$, dunque l'angolo *BIK* è retto, e del

circolo che si facesse passare per $BIK$, sarebbe $F$ il centro.

VII. Le normali da $F$ sopra $BI$, ed $IK$, (cioè le $FH$, ed $FQ$) le dividono in due parti uguali,

onde $BH = HI$, ed $IQ = QK$.

E viceversa le normali da $H$, e da $Q$ a metà di $BI$, ed $IK$ incontrerebbero il punto $F$.

VIII. I due triangoli rettangoli $BFE$, $IFE$ sono uguali pel lato $FE$ comune, e gli altri a due a due uguali: dunque se l'angolo $FBE$ è uguale alla deviazione (§ 40, IV), anche $FIE$ sarà alla medesima uguale. Ma il primo rappresenta $OA$ (Esame II) dunque il secondo rappresenta $VE$ (§ 14, II). Veggiamo ciò anche meglio.

61. La sezione oraria $GM$ appartiene al piano $FIE$, il quale passa per $I$ come centro della sfera. Or la normale $FI$ si dirige al vertice $V$, e la linea $EI$ tende al punto equatoriale $E$. Ecco come l'angolo $FIE$ è misurato dall' arco $VE$.

62. Il triangolo $BIK$ rettangolo in $I$ presenta il piano del verticale comune al modo stesso che nella fig. 12; $BK$ è la sua sezione nel piano dell'orologio: $IF$ è la direzione dell'orario, $IK$ del bisecante $I$, $IB$ del bisecante $I'$. L'angolo $BFI = I$ inclinazione; ed $IFK = I'$ supplemento d' inclinazione : quindi $IKF = \frac{1}{2} I$, ed $IBF = \frac{1}{2} I'$; e per la perpendicolare $IP$ dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa, sarà $IKP = BIP = \frac{1}{2} I$...ed $IBP = PIK = \frac{1}{2} I'$.

63. Si cerchi il valore del $\cos \frac{1}{2} I$ secondo la formola nell' Esame II...$\cos \frac{1}{2} I = \text{sen} \frac{1}{2} P. \cos E$.

Nel triangolo $BIP$, in cui $BI = BD = \frac{1}{sen \frac{1}{2} P . cos\ E}$;
e $PI = 1$; si ha $BI : IP = \frac{1}{sen \frac{1}{2} P . cos\ E} : 1 = 1 : cos \frac{1}{2} I$
$= sen \frac{1}{2} P . cos\ E$.

## ESAME VII.

*Se le costruzioni lineari della fig. 14 esprimono le sferiche della fig. 5.*

64. La piramide tetraedra rettangolare $CIPK$(*fig.* 14) esprime il triangolo sferico $POA$ rettangolo in $O$ figura 5.

1° $PO = E$ elevazione del polo fig. 5; $PCI = PCL = E$ fig. 14.

2° $AO = D$ deviazione fig. 5...$PCK = OCA = D$ fig. 14.

3° $OPA = \frac{1}{2} P$ semiangolo orario fig. 5....$ODA = OIA = \frac{1}{2} P$ fig. 14.

4° $OAP = \frac{1}{2} I$ seminclinazione fig. 5...$IKP = BIP = \frac{1}{2} I$ fig. 14.

*Angolo di deviazione $D = OCA$.*

65. Nel $\Delta$ $ICO$ (raggio $CO$) $CO : IO = 1 : sen\ E$

Nel $\Delta$ $IOA = ODA$ (raggio $IO$) $IO : OA = 1 : tang \frac{1}{2} P$ onde

$$CO : OA = 1 : tang \tfrac{1}{2} P\ sen\ E$$

Intanto nel $\Delta$ $COA$ (raggio $CO$) $CO : OA = 1 : tang\ OCA = tang\ D$, dunque $tang\ D = tang \frac{1}{2} P\ sen\ E$ (§ 15 form. I).

*Angolo di seminclinazione* $\frac{1}{2}$ $I = IKP$.

66. Nel $\triangle$ $PKI$ (raggio $IK$) $IK : KP = 1 : \cos IKP$ ($\frac{1}{2} I$). Si cerchino i valori di $IK$, e di $KP$

$$I \triangle \triangle CIA, CIK \ldots CA : IA(AD) = IC : IK = \frac{IC . AD}{CA}$$

$$I \triangle \triangle COA, CPK .. CA : OA = CP : KP = \frac{OA . CP}{CA};$$

sostituendo e rimettendo la prima porzione

$$IC . AD : CP . OA = 1 : \cos \tfrac{1}{2} I = \frac{CP . OA}{IC . AD}$$

cioè $$\cos \tfrac{1}{2} I = \frac{\dfrac{1}{\cot E . \tan \frac{1}{2} P . \cos E}}{\dfrac{1}{\text{sen } E} . \dfrac{1}{\cos \frac{1}{2} P . \cos E}}$$

$$= \tan \tfrac{1}{2} P . \cos \tfrac{1}{2} P . \cot E . \text{sen } E = \text{sen } \tfrac{1}{2} P . \cos E.$$

**APPENDICE ALL' ESAME III.**

66. Scrivendo una teoria nuova, io mi dirigo ai conoscitori dell' antica : perciò ho supposto avvedutamente molte cose, acciocchè il giudizio del mio lavoro appartenga ai più periti nell'arte, e non già ai meno periti. Ma volendo poi nella pratica, che anche questi si giovino della mia invenzione, aggiungo qui qualche cosa.

Per usare della mia opera è necessario aver trovato prima i punti equinoziali delle linee orarie. Il metodo da me adottato nell' Esame III era il solo allora necessario allo sviluppamento delle mie idee; ma ricerca per l' esecuzione un semicircolo ben graduato, ed una mano ben destra a tirar le secanti. Adesso aggiungo due metodi geometrici, il primo per dividere l' equa-

tore di *15°* in *15°;* ed il secondo per suddividerlo di *7°*, *30'*, in *7°*, *30'*, e poi di *3° 45'*, in *3°*, *45'*, e così bisecando indefinitamente.

METODO I.

1. Suppongo il piano dell'orologio (*fig. 17*) un parallelogrammo simile ad un foglio di carta da scrivere: vi si conducono nel mezzo $A$ due linee fra loro perpendicolari; $QE$ per la lunghezza, ed $SN$ per la larghezza: cosicchè se $Q$ ed $E$ guardano est ed ovest; $N$ ed $S$ guarderanno nord e sud. Sarà $SN$ la meridiana, ed $EQ$ l'equinoziale: $A$ il punto d'incontro. *Fig. 17.*

2. Con un raggio qualunque $AB$ (circa un ottavo di tutta la lunghezza $EQ$), e col centro $A$ si descrive un circolo $BDFG$.

3. Prendo $GV$ uguale all'elevazione $E$ del polo, e tiro 1° il raggio $AV$: 2° la perpendicolare $VP$ ad $SN$: 3° la tangente $VC$.

Sarà $CVA$ il triangolo polare : quindi $C$ il centro del quadrante, $V$ il vertice, $P$ il piede dell'indice $PV$: $A$ il punto equinoziale comune colla meridiana, $CV$ l'asse del mondo, $VA$ il raggio dell'equatore.

*N. B.* Col metodo ordinario fig. 13 si porterebbe $VA$ nella meridiana $AB$, e fatto centro in $B$ si descriverebbe il semicerchio dell'equatore, e le secanti tirate da $B$ ai punti di divisione incontrando l'equinoziale darebbero i punti al modo stesso come se partissero dal centro dell'equatore. Gli angoli orari si devono dunque riferire come centro a $B$. Restando

dunque il nostro circolo descritto come nella presente fig. 17 gli angoli orarî che partono da *B*, sono iscritti. Posto ciò.

4. Tiro *BD* e *BG*, e noto che questi angoli *ABD*, *ABG* sono di *45*°, perchè posano sopra *DF* e *GF* di *90*°, onde corrispondono all' ora *3*ª avanti e dopo mezzogiorno.

5. Coll'apertura del diametro *BF* fatto centro 1° in *B* descrivo il circolo *FMNO*, e dopo 2° fatto centro in *F* ne descrivo un altro *BKL*. Osservo che si tagliano in *M* ed in *O*. Gli angoli *ABM*, *ABO* sono di *60*°, perchè dal centro *B* posano sugli archi *FM* ed *FO* sottesi dal raggio : dunque appartengono all' ora *4*ª avanti e dopo mezzogiorno.

6. Colla stessa apertura fatto centro in *M* ed in *O* descrivo i due circoli *BFKQ*, *BFLE*. Osservo 1° che toccano *B* ed *F*, onde gli archi *FRB*, *FTB* sottesi dal raggio *FB* sono di *60*°, e le loro metà *FR*, *FT* sono di *30*°, e gli angoli *FBR*, *FBT* iscritti di *15*° appartengono all' ora *1*ª avanti e dopo mezzogiorno. Osservo 2° che gli archi *FK*. *FL* sono di *60*°, onde gli angoli *ABK*, *ABL* sono di *30*°, ed appartengono all' ora 2ª come sopra. Osservo 3° che gli archi *FKQ*, *FLE* sono uguali *TFKQ*, — *TF*, ed *RFLE* — *RF* cioè *180*° — *30*°=*150*°; onde gli angoli *ABQ*, *ABE* sono di *75*° corrispondenti all' ora *5*ª.

7. Intanto se io faccio un poco di attenzione, mi accorgo che quello, che ho ottenuto con due aperture di compasso, poteva averlo con una sola. Osservo dunque

1° Che $BM$, $BO$ sono uguali a $BF = 2AB$, onde da $B$ in $O$ vi sono due passi coll' apertura $AB$. Or il primo passo arriva in $a$ ovvero in $b$, perchè come gli archi $BM$, $BO$ sono di $60°$ nel circolo maggiore, così $Ba$, $Bb$ sono di $60°$ nel circolo minore: dunque il secondo passo ci porterà da $a$ in $M$, e da $b$ in $O$ in linea retta.

2° $MQ$ ed $OE$ sono uguali a $BF = 2AB$, dunque con due passi si va da $M$ in $Q$, e da $O$ in $E$. Così tornando ci sono due passi da $M$ in $T$, e da $O$ in $R$.

3° Resta a determinare nel circolo piccolo le rette $BK$, $BL$. Come $FK$ ed $FL$ sono di $60°$, così $Fc$, $Fd$, sono per conseguenza de' due angoli iscritti di $60°$. Fatto centro in $F$ si seguino i due punti $c$ e $d$ col raggio stesso $AB = AF$, e già si ha in $c$ ed in $d$ deve dirigere le rette $BK$, $BL$. Ci potremmo servire de' punti $a$ e $b$, e dirigendo ad essi le rette da $F$ si avrebbero nell' equinoziale i medesimi punti d' intersezione.

Ed ecco come per la divisione proposta di $15°$, in $15°$ si sono trovati tutti i punti equinoziali con una sola apertura di compasso ed un circolo solo.

*Raccogliendo*

$15° = ABR = ABT \ldots 30° = ABc = ABd$ ovvero $AFa = AFb$
$45° = ABD = ABG \ldots 60° = ABM = ABO\,75° = ABQ = ABE$

Sebbene questa divisione dia gli angoli orari $P$ dalla meridiana $AB$, pure i loro complementi darebbero le ore dall' orizzonte, se non ci fosse qualche cosa ad avvertire

*Per le ore babilonesi.*

L' ora *I* ha il punto equinoziale ad ovest in *E*, imperciocchè se $ABE = 75°$...sarà $AEB = 15°$.

L' ora *II* in *O*, la *III* in *G*, la *IV* in *L*, la *V* in *T*, la *VI* nella meridiana in *A* : e passando ad oriente.

L' ora *VII* in *R*, l' *VIII* in *K*, la *IX* in *D*, la *X* in *M*, l' *XI* in *Q*.

L' ora *XII* parallela all' equinoziale che tocca la meridiana a metà fra il centro del quadrante, e l'intersezione dell' equinoziale.

L' ora *XIII* è prolungazione dal punto dell'ora *I*, e l' ora *XIV* dal punto dell' ora *II*. Le ore italiane antiche avrebbero i medesimi punti, ma

*Per le ore italiane civili.*

Siccome l' ora *23* dista dal tramonto mezz' ora, e l' ora *22* dista un' ora e mezzo ec. così ci vogliono i punti delle mezz' ore, ed ecco il metodo geometrico di ritrovarli.

METODO II.

Svestita la fig. 17 di tutti i circoli si conservino per questa *(fig. 18)* i punti di divisione ritrovati colle secanti condotte da *B*.

1. Giacchè l' angolo $ABQ = 75°$, il suo complemento $AQB = 15°$: posto ciò chiamo quest'angolo *P*, e porto la sua cosecante *BQ* nell' equinoziale da *Q* in *23* a sinistra, e da *Q* in *17* a destra.

Analizziamo questa costruzione: 1° Il triangolo *BQ 23* è isoscele, dunque l'angolo *AB 23 = Q 23 B;* or l'angolo esterno *AQB* è ugnale ai due interni opposti; ma questo è di *15°*, dunque quelli sono di *7°, 30'*. 2° Il triangolo *QB 17* è parimenti isoscele, e posto in *Q* l'angolo di *15°*, gli altri due alla base *B 17* saranno di *90°—(7°, 30')=82°, 30'*: ma *QBA = 75°*: dunque *AB 17 = 7°, 30'*. Così il punto *23* sarà mezz'ora prima del tramonto, ed il punto *17* mezz'ora prima del mezzogiorno.

2° Giacchè *ABD=45°* sarà anche il complemento *ADB = 45°*, porto la cosecante *BD* a sinistra da *D* in *22*, ed a destra da *D* in *16*. Darà la dimostrazione precedente *A 22 B*, ed *AB 16* uguali *22°, 30'*, cioè un'ora e mezzo prima del tramonto, ed un'ora e mezzo prima del mezzogiorno, cioè in *22*, e *16* i punti di queste ore.

3° Giacchè *ABR=15°*, sarà *ARB=75°*: portando dunque *BR* da *R* a sinistra in *21*, ed a destra in *15*, avrò *A 21 B* ed *AB 15* di *37°, 30'*. Passo dall'altro lato.

4° *ABT = 15°... ATB = 75°... BT* da *T* in *20*, ed in *14*.

5° *ABG = 45°... AGB =45°... BG* da *G* in *19* ed in *13*.

6° *ABE = 75°...AEB = 15°... BE* da *E* in *18* ed in *12*.

7° I punti delle ore *9ʰ*, *10ʰ*, *11ʰ* sono gli stessi delle ore *21ʰ*, *22ʰ*, *23ʰ* a cui si dirige il loro prolungamento.

*N. B.* Da quanto si è detto si vede che il trasporto delle cosecanti biseca gli angoli : onde per avere i punti delle mezz'ore si devono bisecare gli angoli delle ore impari.

Per avere i punti de' quarti si devono bisecare gli angoli delle mezz'ore.

Compresa la teoria si può progredire ad ulteriori divisioni.

# PARTE SECONDA

## OPERAZIONI PRATICHE.

---

### Preambolo

68. Tutta la pratica della presente teoria applicata agli orologi italiani è descritta e compresa nella figura grande della tavola III. È bene darne prima uno sbozzo generale, per comprenderne poi meglio i dettagli minuti e le regole particolari.

1° *SN* (cioè sud nord) è la meridiana;

2° *SVM* è il triangolo polare di cui

*SV* è l'asse del mondo $= \frac{1}{sen\ E}$

*VM* il raggio equatoriale $= \frac{1}{cos\ E}$

*PV* l'indice $= 1$, di cui *V* il vertice, e *P* il piede,
*PS* il diametro del circolo polare $= cot\ E$

*PM* $= tang\ E$, per l'angolo *PVM* $=$ *PSV* dell'elevazione *E* del polo

*C* a metà di *CM* il punto, dove la nuova curva detta *orizzontoide* chiude il nodo.

3° *EO* (cioè est ovest) la sezione del primo verticale;

4° *AB* la sezione dell'equatore o linea equinoziale;

5° *FMG* il semicerchio dell'equatore diviso secondo le ore italiane sul diametro *FG*, la di cui prolungazione *Hh* dà il limite delle ore riferite all'orizzonte. Da *F* a *23* vi sono 7°, *30'*, da *23* a *22* vi sono *15°*, e così si progredisce di *15°* in *15°* sino all'ora *12*, che dista da *G* 7°, *30'*. Le ore *9*, *10*, *11* hanno per punti quelli delle ore *21*, *22*, *23* come si notò al § 36, e si è ripetuto più volte.

6° Dal centro *N* pei punti ritrovati nell'arco dell'equatore partono le cosecanti orarie, che terminano nell'equinoziale, dove toccano i punti *E* delle ore secondo si disse nella spiegazione delle fig. 13 e 18.

*N. B.* Sin qui la costruzione è antica, se si eccettua l'aggiunta del circolo polare annunziato al § 44. Venghiamo alle costruzioni nuove ed indipendenti dall'orologio astronomico.

7° Le linee che partono dal piede *P*, e terminano da un lato sul circolo polare, e dall'altro sull'equinoziale sono i raggi vettori di ogni linea oraria, cioè è *BK* della figura 14. Sono queste linee descritte a tratti interrotti da punti per distinguersi meglio, e portano per nome il numero corrispondente delle ore, a cui appartengono. Sono molte di numero, ma non formano, che unica costruzione ripetuta per ogni oraria. — Come trovasi il punto equinoziale di questi raggi vettori vedrassi meglio appresso.

8° Le linee che partono da *S* centro del quadrante e terminano all'equinoziale dal lato opposto ai raggi

vettori sono le sezioni dei meridiani parallele alle orarie, o dei bisecanti *I* § 38, sono i *CA* della fig. 14, hanno anch'esse per nome i numeri delle ore corrispondenti, e sono segnate per distinguersi a tratti interrotti. Anche queste sono molte, ma formano una stessa costruzione. Il loro punto equinoziale si trova facilmente come vedremo appresso. Un occhio perito non si confonde per la moltitndine delle linec, anzi si compiace della simmetrica loro corrispondenza.

9° Le linee orarie sono tirate intiere, perpendicolari come vedrassi ai raggi vettori, e parallele alle sezioni de' meridiani bisecanti. Hanno per limite le curve iperboliche de' tropici.

*N. B.* Si trascurò intieramente la linea dell'ora *23*, perchè molto discosta: altrimenti bisognava supporre l'indice troppo piccolo: per cui la fignra sarebbe riuscita troppo confusa. Questa legge deve osservarsi nel tracciare gli orologi; bisogna sacrificar qualche linea, per avere le altre più distinte.

10° Finalmente la curva $xPCPy$ è l'*orizzontoide*, in cui la retta $zz'$ parallela all'equinoziale $AB$ ed al primo verticale $EO$, ed a tutti e due intermedia, che passa per $\frac{1}{2}\, PM = \frac{1}{2}\, tang\, E$ è l'asintoto che la dirige, ed a cui si appoggia.

Descritto ciò come in un quadro generale, venghiamo alla

### TRATTAZIONE DELLA NUOVA PRATICA.

69. Disposte le cose come nella figura 13, ed aggiunto il circolo polare, il gioco § 43 delle *cosec P*

darà tutta la costruzione: imperciocchè avendo già di ogni oraria un punto nell'equinoziale non bisogna conoscere che la loro direzione e la loro lunghezza.

I. La direzione delle linee orarie è normale al raggio vettore, ed è parallela alle sezioni de' meridiani bisecanti.

II. La loro lunghezza vien definita dall'analemma orizzontale de' segni fig. 2.

§ *1*. *Regole generali per la direzione.*

70. I. Si apra il compasso dal centro *N* (*fig. grande Tav. III*) dell'equatore sino al punto equinoziale dell'oraria, cioè sino a *23*, *22*, *21* ec. secondo le ore. Egli è questo il valore $=$ *cosec P:* e tenendo fermo il punto equinoziale si trasporti a sinistra ed a destra nella stessa equinoziale. Il primo punto ritrovato sarà del raggio vettore, ed il secondo del meridiano parallelo nelle ore italiane: si opera viceversa nelle ore babilonesi.

*N. B.* Per le ore *9*, *10*, *11* italiane, che hanno i punti *E* negativi (§ 36) il raggio vettore ha il suo punto equinoziale a destra, e quello del meridiano è a sinistra. Così le ore *XIII* e *XIV* babilonesi per la stessa ragione hanno il raggio vettore a sinistra ed il meridiano a destra della meridiana. L'ora *XII* babilonese come l'ora $11^h\ 30'$ italiana passano per $\frac{1}{2}$ *CM* e sono parallele all'equinoziale, come si è detto più volte.

II. Si tiri prima dal piede dell'indice ogni raggio vettore, e poi dal centro *C* del quadrante ogni se-

zione parallela. Queste due linee s'incontreranno nel calcolo polare.

### § 2. *Direzione normale.*

71. Per avere la direzione delle orarie normali ai raggi vettori vi sono tre metodi:

1° *Il geometrico.* Dato un punto condurre sopra una linea perpendicolare. Essa è l'oraria.

2° *La bisezione del raggio vettore* (*BK fig. 14*). Eccone il modo: Si apra il compasso più della metà del raggio vettore: e fatto centro prima nel punto equinoziale di lui, e dopo nell'incontro del circolo polare si forma l'intersezione di due archetti dalla parte opposta al punto *E* dell'oraria, e dirigendo fra questi due punti una linea, si avrà l'oraria desiderata.

3° *La bisezione di BI fig. 14.* Non volendo descrivere il circolo polare, nè segnare la sezione parallela del meridiano, nè prolungare il raggio vettore sino al suo incontro: basta compire il triangolo (*PIB*) cioè col raggio vettore dall' equinoziale al piede e l'indice per cateti, e colla linea che unisce la sommità dell'indice col punto equinoziale per ipotenusa. Or questa si biseca (§ 60 VII) con una normale, che trova nel raggio vettore il punto a cui dirigere l'oraria.

Questo metodo fu il primo che mi venne in mente, quando abbozzava la teoria. Sembra forse laborioso, ma non lo è: anzi è facile, come farò vedere appresso, insegnando a descrivere per punti *l'orizzontoide.*

## § 3. *Direzione parallela.*

72. Per avere la direzione dell'oraria parallela alla sezione del meridiano si possono adoperare due metodi geometrici:

1° *Dato un punto ed una linea condurre a questa una parallela.* Dal punto *E* equinoziale dell'oraria si tiri una obliqua qualunque alla sezione del meridiano p. e. al centro *S*, la quale serva di raggio, e con essa fatto prima centro in *S* si descriva un arco che da *E* vada a toccare la sezione del meridiano, e poscia fatto centro in *E* si descriva un altro arco alquanto maggiore che incominciando dalla sezione giri dal lato dove trovasi il punto *E*. Si prenda la corda del primo arco da *E* alla sezione, e con essa si stacchi dal secondo arco una parte uguale. Per questo punto si tiri da *E* l'oraria, e sarà parallela alla sezione del meridiano per gli angoli alterni interni già costruiti ugnali;

2° Da *E* si abbassi sulla sezione una perpendicolare ed un'altra ugnale se ne elevi sul centro *S*, la sommità di questa darà la direzione dell' oraria.

Nella pratica basta allargare *(fig. 29)* il compasso da *E* in modo da descrivere un arco tangente alla sezione del meridiano e dopo colla stessa apertura fatto centro in *S* descrivere un arco dalla parte che guarda il punto *E* (dentro di cui certamente sarebbe la perpendicolare elevata da *S*). Mettendo la regola dal punto *E* in direzione tangente all'arco secondo darà la direzione dell' oraria con molta esattezza.

## § *4*. *Regole per la lunghezza.*

73. A definire la lunghezza dell'oraria dall'equinoziale sino ai punti dei tropici, dobbiamo servirci dell'analemma dei segni all'orizzonte, cioè dell'ampiezza, di cui si diede la dimostrazione nell'Esame I.

I. In una carta doppia, o in un cartoncino sottile si segni il doppio angolo di ampiezza orizzontale (*fig. 2*): sarà questo l'analemma dei segni proprio della nuova teoria.

Nell'Esame I furono calcolati per Palermo questi angoli, e si trovarono di $30^\circ$, $24'$, $20''$. Per eseguirli si tiri (*fig. 16*) $BE = 100{,}00$: ed al punto $E$ la normale $TET'$; sia $TE = ET'$, uguale $58{,}68$, si conducano i lati $BT$, $BT'$, i quali sieno estesi a sufficienza.

II. Si applichi il vertice $B$ all'analemma al punto $B$ equinoziale del raggio vettore, e si distenda $BE$ nella linea equinoziale: (l'apertura del doppio angolo nelle ore italiane guarderà ad occidente, e nelle babilonesi ad oriente). Dove i lati $BT$, $BT'$ incontrano l'oraria, ivi ne determinano la lunghezza. Se si uniscono questi estremi, si ha sul quadrante la curva dei tropici.

### *Osservazioni.*

I. Il trasporto delle *cosec* $P$ a sinistra ed a destra sull'equinoziale (risultato della presente teoria) biseca gli angoli $P$ riferiti all'orizzonte, e trova anche dal lato opposto i punti appartenenti agli angoli $\frac{1}{2}P$ riferiti al meridiano. Segue da ciò

1° *Nelle ore italiane civili*, che l' ora p. e. *23*, la quale dista dal tramonto mezz'ora, abbia per $\frac{1}{2}$ $P$ un quarto d'ora prima del tramonto, che si trova trasportando la *cosec* $P$ a sinistra, la quale dia trasportata a destra anche un quarto d'ora prima del mezzogiorno: cosicchè il raggio vettore sia nel punto equinoziale di $23^h\ 15'$, e la sezione parallela abbia quello di $17^h\ 15'$. L'ora *22*, che dista dal tramonto un'ora e mezzo, ha per $\frac{1}{2}$ $P$ il punto di tre quarti prima del tramonto, e prima del mezzogiorno, onde il raggio vettore è al punto $22^h\ ,45'$, e la sezione parallela a $16^h\ ,45'$, e così di seguito per l'altre ore.

2° *Nelle ore babilonesi*, l'ora *I* dista dal sorgere, un'ora, ed ha il punto $\frac{1}{2}$ $P$ mezz'ora dopo del sorgere che si trova trasportando la *cosec P* a destra, e dà l'altro punto $\frac{1}{2}$ $P$ mezz' ora dopo il mezzogiorno trasportandosi a sinistra: onde il raggio vettore ha il suo punto a $0°,\ 30'$, e la sezione parallela l'ha alle $VI^h\ 30'$ ec.

II. Su questi dati si è formata la doppia tavola annessa, la quale qui è semplicemente utile, ma appresso diverrà necessaria: volendo cioè con questa nuova teoria costruire orologi a sole in un muro comunque inclinato verticale e declinante.

(*) L'ora XII babilonese ha per punto equinoziale del raggio vettore quello dell'ora sesta cioè l'intersezione dell'equinoziale colla meridiana, e per punto equinoziale della sezione parallela quello dell'ora dodicesima. Ciò significa che passa per $\frac{1}{2}$ *CM (fig. grande T. III)* ed è parallela all'equinoziale.

| | ORE | RAGGIO VETTORE | | SEZIONE parallela | | | ORE | RAGGIO VETTORE | | SEZIONE parallela | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h | h | ' | h | ' | | h | h | ' | h | ' |
| ORE ITALIANE CIVILI | 23 | 23 | 15 | 17 | 15 | ORE BABILONESI | I | 0 | 30 | 6 | 30 |
| | 22 | 22 | 45 | 16 | 45 | | II | 1 | — | 7 | — |
| | 21 | 22 | 15 | 16 | 15 | | III | 1 | 30 | 7 | 30 |
| | 20 | 21 | 45 | 15 | 45 | | IV | 2 | — | 8 | — |
| | 19 | 21 | 15 | 15 | 15 | | V | 2 | 30 | 8 | 30 |
| | 18 | 20 | 45 | 14 | 45 | | VI | 3 | — | 9 | — |
| | 17 | 20 | 15 | 14 | 15 | | VII | 3 | 30 | 9 | 30 |
| | 16 | 19 | 45 | 13 | 45 | | VIII | 4 | — | 10 | — |
| | 15 | 19 | 15 | 13 | 15 | | IX | 4 | 30 | 10 | 30 |
| | 14 | 18 | 45 | 12 | 45 | | X | 5 | — | 11 | — |
| | 13 | 18 | 15 | 12 | 15 | | XI | 5 | 30 | 11 | 30 |
| | 12 | 17 | 45 | 11 | 45 | | XII | 6 | — | 12 | —(*) |
| | 11 | 17 | 15 | 23 | 15 | | XIII | 6 | 30 | 0 | 30 |
| | 10 | 16 | 45 | 22 | 45 | | XIV | 7 | — | 1 | — |
| | 9 | 16 | 15 | 22 | 15 | | | | | | |

## APPENDICE PER L'APPLICAZIONE GENERALE DELLA TEORIA.

74. Nella teoria esposta ho esaminato con diligenza le variazioni dell'orizzonte mobile sul fermo, e nella pratica ne ho applicato i risultati al piano orizzontale. Pare sin qui che il mio scopo sia stato particolare, e pure se si fa un poco più di attenzione vedrassi, che egli è generalissimo ed universale. Imperciocchè nell' Esame IV § 40, I, considero come i tre circoli *AP*, *AO'B*, *AV'B* (*fig. 11*) hanno comune la sezione *AB* nell'orizzonte razionale *OEUF*. Or in qualunque

altro piano si può tirare la sezione dell'orizzonte razionale sia pure egli inclinato verticale e declinante comunque. In questa sezione i tre circoli avranno un punto comune.

75. Questo punto può facilmente trovarsi per la sezione del meridiano bisecante *AP*. Eccone il modo: *AP* come meridiano ha un punto nel centro del quadrante, come bisecante ne ha un altro nell'equinoziale a quel lato dove sarebbe l'ora indicata dalla tavola precedente. Tirando fra questi due punti la linea sezione di *AP* s'incontrerà coll'orizzontale, e questo punto d'incontro apparterrà anche all'oraria da descriversi.

76. L'oraria così sarà definita, mentre avrà due punti, uno suo proprio nell'equinoziale, e l'altro nell'orizzontale comune alla sezione di meridiano bisecante *AP*.

77. Studiando attentamente la questione ho trovato che il trasporto della *cosec P* § *43* a destra o a sinistra è legge generale, e serve per trovare il punto della sezione del bisecante *AP*: ma ciò deve farsi in una tangente *direttrice*, e non già nell'equinoziale.

Ecco il raziocinio. *AP* incontra l'equatore in un punto dove si biseca l'angolo orario dall'orizzonte $180° — P$, ciò si ottiene trasportando la cosecante oraria dalla parte dove guarda l'apertura dell'angolo *P*, ciò che secondo la posizione del piano può essere a sinistra o a destra, sarà però sempre dal lato delle ore segnate nella tavola per la sezione parallela. In-

tanto la tangente all'equatore su di cui si opera, deve toccarlo nel punto del meridiano del paese e non già della sostilare. Posto ciò diamo delle

## REGOLE PRATICHE.

1° Sia un piano qualunque, piantatovi l'indice, si segnino le due linee fondamentali, cioè 1. la linea d'inclinazione del piano che passa sul piede dell'indice, 2. la sezione dell'orizzonte razionale che passa sul vertice;

2° Col metodo delle ombre uguali o con un altro qualunque si trovi la sostilare;

3° Si formi il triangolo polare, onde stabilire il centro del quadrante, segnare l'equinoziale, e descrivere tangente ad essa il circolo dell'equatore col raggio che gli è dovuto;

4° Dal centro dell' equatore si tirino due secanti ad angolo retto, la prima al punto dove s'incontrano l'equinoziale coll'orizzontale, e l'altra che segni nell'equinoziale il punto dovuto alla meridiana del paese;

5° Così il meridiano del paese è determinato da tre punti cioè 1. il centro del quadrante, 2. il centro dell'equatore, 3. il punto d'incontro coll'equinoziale;

6° La secante diretta dal centro dell' equatore al terzo punto di sopra segnato è nel piano del meridiano del paese. Or dove questa secante taglia l'equatore, ivi si conduca una tangente, che io chiamo tangente *direttrice;*

7° Sulla direttrice si opera al modo stesso come insegnossi per l'equinoziale nelle figure 17 e 18, e si trovano i punti appartenenti alle ore ed alle mezz'ore astronomiche. Si destinano questi alle ore italiane civili, e quelli alle babilonesi, facendo attenzione all'aspetto del cielo a cui guarda il quadrante;

8° Si conducono le secanti ai punti trovati nella direttrice, e dove toccheranno l'equinoziale, ivi saranno i punti *E* delle orarie;

9° Per avere poi i punti, a cui si dirigono le sezioni *AP*, si prendano dal centro dell'equatore sino alla direttrice le *cosec. P.* delle orarie da descriversi, e si trasportino da quel lato dove sono le ore che nella tavola di sopra corrispondono alle sezioni parallele p. e. dovendo segnare l'ora *17*, la cosecante si porti nella direttrice dal *17* al lato dove dovrebbe essere il punto dell'ora *14*ʰ *15'*. Si segna un punto, a cui si dirige la secante dal centro dell'equatore, e dove questa taglia l'eqninoziale, ivi è il punto desiderato per condurre la sezione di *AP;*

10° Condotta la sezione di *AP* dal centro del quadrante al suo punto equinoziale già ritrovato, essa incontrerà l'orizzontale, e darà il punto che ha comune coll'oraria, il qnale serve per disegnarla;

11° A definire poi la lunghezza delle linee orarie si descrivano le curve de' tropici col metodo che a ciascuno sembrerà più spedito. Col detto sin qui io già ho determinato geometricamente la posizione delle linee orarie senza aver bisogno di costruire orologio astronomico, come mi era proposto dal principio.

# PARTE TERZA

## ESERCITAZIONI ANALITICHE.

---

78. Quanto una teoria meglio si adatta al calcolo, tanto è più elegante. Il calcolo dà alla teoria un aspetto più generale ed un più esteso sviluppamento. A questo scopo aggiungo le presenti esercitazioni.

## CAPITOLO I.

### QUANTITA' DA CALCOLARSI.

Riferendo alla fig. 14 le quantità variabili di cui cerco il valore, esse sono di due sorti, angoli cioè e lati. Gli angoli sono di due specie: 1ª di deviazione $D$ della sezione oraria colla meridiana; 2ª d'inclinazione $I$ ovvero $I'$ del circolo orario sull'orizzonte.

75. La deviazione $D$ è rappresentata dall'angolo $FMP = PBO = GPF = OCA$. Si ottiene colla formola $tang\ D = tang\ \frac{1}{2} P\ sen\ E$ ($\alpha$). Serve a determinare 1° l'angolo $FMP$ della sezione oraria colla meridiana: 2° del raggio vettore coll'equinoziale $PBO$; 3° del medesimo colla sezione del primo verticale: $GPF$; 4° della sezione parallela colla meridiana $OCA$.

79. L'inclinazione $I$ è rappresentata dall'angolo $BFI$, il di cui supplemento $IFP$ rappresenta $I'$. Quindi $IKP$

$= HFI = \frac{1}{2} BFI = \frac{1}{2} I$, come $IBF = QFK = \frac{1}{2} IFP = \frac{1}{2} I'$: ma $I + I' = 180^\circ$ dunque $\frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I' = 90$. La formola dà $\cos \frac{1}{2} I = \mathrm{sen} \frac{1}{2} P . \cos E$ (6). Serve l'inclinazione a trovare il valore del raggio vettore $BK$, e delle sue parti $PB$ e $PK$, $FB$ ed $FP$. La quantità più interessante è $FP$, perchè è il raggio vettore della nuova curva *orizzontoide*, essa è la normale tirata dal piede dell'indice sulla sezione oraria.

## TAVOLE CALCOLATE E LORO USO.

Le tavole I e II danno i valori $D$ e $\frac{1}{2} I$ in tutte le ore italiane civili e nelle babilonesi per l'elevazione del polo in Palermo $38^\circ, 6', 44''$ (V. in fine).

*N. B.* I. Le ore babilonesi possono servire per le mezz'ore italiane, come le ore italiane per le mezz'ore babilonesi, onde il doppio calcolo è utile in tutti e due i sistemi.

II. Quantunque l'$E$ di tutte le tavole qui annesse è $38^\circ, 6', 44''$; pure non lasciano di presentare la questione sotto un aspetto generale: ed è facile ad ognuno conservando la stessa formola e i dati generali, sostituire l'$E$ corrispondente alla sua latitudine. Così le mie tavole saranno più utili di grossi volumi laboriosamente calcolati, perchè nelle mie si dà la forma del calcolo per qualunque grado minuto primo e minuto secondo, mentre in quelli si danno i risultati tutto al più di ogni grado.

80. Le tavole III e IV danno ad ogni ora italiana babilonese i valori $OE$, $EB$, $OB$, $OA$ fig. 14, per

avere nell'equinoziale i punti $E$ dell'oraria, $B$ del raggio vettore, $A$ della sezione parallela colle formole

$$1^a\ OE = \frac{cot\ P}{cos\ E} \dots\ 2^a\ EB = \frac{cosec\ P}{cos\ E}$$

$$3^a\ OB = \frac{cot\ {}^1/_2 P}{cos\ E} = \frac{cot\ P + cosec\ P}{cos\ E}$$

$$4^a\ OA = \frac{tang\ {}^1/_2 P}{cos\ E} = \frac{cot\ P - cosec\ P}{cos\ E}$$

81. Applicazione de' valori trovati per le orarie italiane.

$E$ dell'oraria da $23^h$ a $18^h$ si trova nell'equinoziale a sinistra della meridiana (est) (*Tav. III*), e da $17^h$ a $12^h$ a destra (ovest). Per le ore $9^h$, $10^h$, $11^h$ a sinistra (est) in $21^h$, $22^h$, $23^h$; quantunque le linee poi segnate restino a destra, considerandosi come occulto l'incominciamento dall'equinoziale.

$B$ del raggio vettore da $23^h$ a $12^h$ si trova a sinistra (est): ma per le ore $9^h$, $10^h$, $11^h$ a destra (ovest) cioè ne' punti $A$ delle ore $21^h$, $22^h$, $23^h$, di cui appresso.

$A$ delle sezioni parallele si trova nell'equinoziale al contrario, cioè per le ore $23^h$ sino all'ora $12$ a destra della meridiana (ovest), e per le $9^h$, $10^h$, $11^h$ a sinistra (est) ne' punti $B$ delle ore $21^h$, $22^h$, $23^h$.

*N. B.* $BE$ è uguale sempre ad $EA$: ma quando $E$ si trova a sinistra cioè nelle ore pomeridiane, allora $OB = BE + EO$: quando però $E$ si trova a destra cioè nelle ore antimeridiane, allora $OB = BE - EO$, che nelle tavole è il valore di $OA$. E viceversa per $OA$, imperciocchè stando $E$ a sinistra nelle ore pomeridiane $OA = BE - OE$, ma coll'$E$ a destra nelle ore antimeridiane $OA = BE + EO$.

82. Siccome il valore *BE* è di sommo interesse, e la sua esattezza influisce sulla deviazione e sull'inclinazione, perciò le tavole V e VI si occupano dei suoi rapporti.

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \; BE = ED \text{ dunque } \frac{cosec\, P}{cos\, E} = \frac{1}{cos\, E\; sen\, P} \\ 2^\circ \; BE = IE \text{ dunque } \frac{sec\, D}{sen\, I} = \frac{1}{cos\, D\; sen\, I} \end{array}\right\} \text{quindi}$$

$$cos\, D.\; sen\, I = cos\, E.\; sen\, P\, (\gamma).$$

Mi piacque di vedere le variazioni di *I* e di *D* colla ($\gamma$). Adoperando però qualche altra formola, quando è necessario evitare la quantità indeterminata $cos\, E = \frac{0}{0}$.

### Variazioni di *I* e di *D*.

$$\frac{sen\, I}{cos\, E} = \frac{sen\, P}{cos\, D}$$

### *Variazioni di I.*

$sen\, I = cos\, E.\frac{sen\, P}{cos\, D}$ considerando *E* come costante

1. L'angolo *I* cresce al crescere di *P* e di *D*.

2. Al principio del moto dell'orizzonte $I = 0^\circ$, o meglio $180^\circ$

Allora $P = 0^\circ \ldots D = 0^\circ \ldots$ onde $sen\, I = cos\, E \frac{0}{1} = 0$.

3. Acciocchè *I* divenga $= 90^\circ$ deve essere

$sen\, \frac{1}{2}\, P = \frac{cos\, 45}{cos\, E}$, e $sen\, D = tang\, E$

Allora $\cos D = \sqrt{1-\text{tang}^2 E} \ldots \cos\frac{1}{2}P$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos^2 45}{\cos^2 E}} \ldots \text{ma } \operatorname{sen} P = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P$$

dunque $\operatorname{sen} P = 2\frac{\cos 45}{\cos E} \times \sqrt{\frac{1-\cos^2 43}{\cos^2 E}}$

$= \frac{1}{\cos E} \times \sqrt{\frac{4\cos^2 45 - 4\cos^4 45}{\cos^2 E}}$ : questo radicale

$$= \sqrt{2-\frac{1}{\cos^2 E}} = \sqrt{2-\sec^2 E} = \sqrt{1-\text{tang}^2 E}$$

dunque $\operatorname{sen} P = \frac{1}{\cos^2 E}\sqrt{1-\text{tang}^2 E}$

$$\operatorname{sen} I = \cos E\frac{\operatorname{sen} P}{\cos D} = \frac{\cos E \times \frac{1}{\cos E} E \times \sqrt{1-\text{tang}^2 E}}{\sqrt{1-\text{tang}^2 E}} = 1.$$

4. Nell'ora $12^a$ prima del tramonto o dopo del sorgere $P = 180^\circ \ldots D = 90^\circ \ldots$ed $I$ deve essere $= 2E$: intanto $\operatorname{sen} I = \cos E\frac{0}{0}$ quantità indeterminata, si prenda dunque altra formola (*fig.19*). Sia $PO = E$; $\operatorname{sen}\frac{1}{2}P = \frac{\cos\frac{1}{2}I}{\cos E}$; ma $\operatorname{sen}\frac{1}{2}P = 1$, dunque $\cos\frac{1}{2}I = \cos E$; $I = 2E$. FIG. 19.

*Variazioni di D.*

1. L'angolo $D = 0^\circ \ldots$quando $P = 0^\circ \ldots I = 0^\circ$, o meglio $180^\circ$

or $\cos D = \cos E\frac{\operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} I} = \cos E\frac{0}{0}$: si prenda altra formola (*fig.19*). Sia $OA = D$, e $PO = E$, sarà $\cos D = \frac{\cos PA}{\cos E}$, ma se l'angolo è $P = 0^\circ$, sarà $PB = PO = E$

$$\cos D = \frac{\cos E}{\cos E} = 1 \ldots D = 0^\circ.$$

2. $D = 90^\circ$...quando $P = 180^\circ$...$I = 2\,E$

$$cos\,D = cos\,E.\frac{0}{sen\,2\,E} = 0 \ldots D = 90^\circ.$$

83. Le tavole VII e VII *bis* servono pel raggio vettore $BK$, e per le sue parti $PB$, $PK$, $BF$, $PF$, nelle ore italiane, e le VIII ed VIII *bis* hanno lo stesso scopo per le babilonesi.

Prima adopero la seminclinazione $\frac{1}{2}I$, e dopo l'inclinazione intiera $I' = 180^\circ - I$.

$$\text{I. } PB = tang\,\tfrac{1}{2}I \ldots PK = cot\,\tfrac{1}{2}I$$

$$BK = tang\,\tfrac{1}{2}\,I + cot\,\tfrac{1}{2}I \text{ onde}$$

$$BF = \frac{tang\,\frac{1}{2}I + cot\,\frac{1}{2}I}{2} \cdots \text{ e } PF = \times\frac{tang\,\frac{1}{2}I - cot\,\frac{1}{2}I}{2}\,(\delta).$$

*Sito del punto F.* Quando la differenza nella ($\delta$) è positiva allora $F$ è tra il piede e l'equinoziale: quando è negativa, allora $F$ passa dalla parte opposta verso il centro del quadrante.

$$\text{II. } BF = cosec\,I' = \frac{1}{sen\,I'} \text{ onde } BK = \frac{2}{sen\,I'}$$

$$PF = cot\,I';\ \text{quindi } PK = cosec\,I' - cot\,I'$$

$$PB = cosec\,I' + cot\,I'.$$

Secondo che $cot\,I'$ è positivo o negativo, $F$ è dalla parte dell'equinoziale o del centro del quadrante.

84. Le tavole IX e X danno l'analisi ne' due triangoli simili $BFE$, $GFP$ ed il valore dei lati $FE$, $GF$, $GP$ colla deviazione $D$, e l'inclinazione $I'$, cioè:

$$FE = \frac{tang\,D}{sen\,I'} \cdots FG = \frac{tang\,D}{tang\,I'}$$

$$GP = \frac{tang\,D}{tang\,I'\,sen\,D} = \frac{cot\,I'}{cos\,D}$$

Da questi valori si hanno due vantaggi, uno teorico, cioè la via del punto $F$. Siccome $cosec\ I' > cot\ I'$, perciò $BF > FP$, onde $EF > FG$: dunque $F$ non iscende verso l'equinoziale più di $\frac{1}{2}$ $PO$, quantunque $PF = \infty$. Quando $PF = 0$, allora $F$ si confonde con $P$: quando $PF$ è negativo, allora $F$ passa dentro il circolo polare, ma non più addentro di $\frac{1}{2}$ $CO$ *(fig. 14)*.

Il secondo vantaggio è pratico. $PG$ dà nella sezione del primo verticale il punto $G$, a cui da $E$ dirigere l'oraria senza raggi vettori e sezioni parallele.

85. Le tavole XI e XII danno i valori $ET$, ed $ET'$, cioè le lunghezze delle orarie dall'$E$ al $T$ verso sud, e dall'$E$ al $T'$ verso nord, ossia la lunghezza da segnarsi fra limiti dei tropici. Si adopera la formola al modo seguente:

Sia $S$ l'angolo dei segni o l'ampiezza (in Palermo $30°, 24', 20''$), ed il suo complemento $S' = 59°, 35', 40''$.

Sia $S' + D = A$; $S' - D = B$;

$$TE = \frac{BE.\ sen\ S}{sen\ A} \ldots ET' = \frac{BE.\ sen\ S}{sen\ B}.$$

86. Le tavole XIII e XIV danno $FT$, ed $FT'$ cioè le lunghezze delle orarie da $F$ ai tropici colla formola:

Siano $S$, ed $S'$ come sopra, ma $S - D = A \ldots$

$$S + D = B \text{ sarà } FT = \frac{tang\ A}{sen\ I'} \ldots FT' = \frac{tang\ B}{sen\ I'}.$$

Questa distanza del punto $F$ dai tropici serve a fissare il punto $F$ in rapporto alle orarie, cosicchè avendo l'oraria si determina il punto $F$, ed avendo il punto $F$ si determina l'oraria. Così questa distanza è sempre utile, ma per le ore $9^h$, $10^h$, $11^h$ pare

ancor necessaria, giacchè di queste si ha il punto $E$ nelle ore $21^h$, $22^h$, $23^h$ troppo discosto: la direzione si rassicura col punto $F$, ma la linea resta occulta sino al punto $T$, dopo del quale l'oraria si segna per restare visibile. La costruzione di queste ore in ogni teoria è complicata; ma come è stata descritta da me diviene facilissima pel valore $FT$.

87. Le tavole XV e XVI servono per le ordinate $y$, e per le ascisse $x$ condotte dal punto $F$, la meridiana è l'asse delle ascisse, e la sezione del primo verticale quello dell'ordinate. L'interesse di queste tavole si comprenderà meglio dall'analisi dell'*orizzontoide*. Le formole adoperate furono:

Raggio vettore $R = -\cot I$.... $x = R \operatorname{sen} d$.... $y = R \cos D$.

88. Le tavole XVII e XVIII raccolgono i risultati. Sono divise in sei colonne. Ogni orologio si può costruire colle colonne $OE$ e $GI$ per la direzione, ed $ET$, $ET'$ per la lunghezza delle orarie; le colonne $EB = EA$ e $BF = FK$ rettificano le posizioni. Le colonne $x$, $y$ servono a descrivere la curva *orizzontoide*. Conchiude una tavoletta che serve per descrivere il nodo della curva, e trovare praticamente l'ordinata massima.

## CAPITOLO II.

### ANALISI DELL' ORIZZONTOIDE.

FIG. 20. 89. Sia (*fig.* 20) $F$ il punto, in cui la linea oraria $FM$ s'incontra colla $PF$ condotta dal piede $P$ dell'in-

dice perpendicolare alla stessa $FM$. Sarà $F$ il punto della curva, che dobbiamo analizzare. Ne troveremo prima l'equazione polare, mettendo in $P$ il polo: e dopo l'equazione a coordinate rettangolari, delle quali $P$ è l'origine, e la meridiana $CM$ l'asse delle ascisse, la sezione del primo verticale $NL$ quello delle ordinate.

## ESAME I.

### *Equazione polare.*

90. Sia $PI$ l'indice considerato perpendicolarmente al piano orizzontale. Tirata $PF$ sarà $PFI$ l'angolo formato dall'orizzonte mobile sul fermo dalla parte che guarda lo stile: $IFB$ l'angolo supplementario dalla parte opposta. Or questo $IFB$ rappresenta $OAO' = I$ (*della fig. 5*), e l'altro $PFI$ rappresenta $O'AE = I'$. Dunque

Chiamiamo $I$ l'inclinazione $IFB$, sarà $PFI = 180° - I$. Or fatto $IP = 1$ ed $FP = r$ avremo

$$r = \cot PFI = -\cot I \ (\alpha).$$

L'angolo $FMP$ di deviazione della sezione oraria dalla meridiana è complemento di $FPM$; sia questo detto $\omega$. Posto ciò

91. Già si è trovato nell'Esame II $\tang D$ (qui $FMP$) $= \tang \frac{1}{2} P. \operatorname{sen} E$, onde $\cot \omega = \tang \frac{1}{2} P. \operatorname{sen} E$ ($\beta$). Si è trovato ancora $\cos \frac{1}{2} I = \operatorname{sen} \frac{1}{2} P. \cos E$ ($\gamma$). Si elimini $P$ isolandolo in ($\beta$) e ($\gamma$).

$$\text{Or } (\beta) \text{ dà } \tang \tfrac{1}{2} P = \frac{\cot \omega}{\operatorname{sen} E} \ (\delta)$$

e (γ) dà $sen\ \frac{1}{2} P = \frac{cos\ \frac{1}{2} I}{cos\ E}$ (ε).

Dividendo (ε) per (δ)

$$\frac{sen\ \frac{1}{2} P}{tang\ \frac{1}{2} P} = cos\ \tfrac{1}{2} P = \frac{cos\ \frac{1}{2} I.\ sen\ E\ tang\ \omega}{cos\ E}$$

onde $cos\ \frac{1}{2} P = cos\ \frac{1}{2} I\ tang\ E\ tang\ \omega$ (z).

Facendo i quadrati di (z) e di (ε), e sommati si ha

$$cos^2\ \tfrac{1}{2} P + sen^2\ \tfrac{1}{2} P = 1 = cos^2\ \tfrac{1}{2} I \frac{1 + tang^2 E.\ cos^2 E.\ tang^2 \omega}{cos^2 E}$$

onde $cos^2\ \frac{1}{2} I = \frac{cos^2 E}{1 + tang^2 E.\ cos^2 E.\ tang^2 \omega}$

$$= \frac{cos^2 E}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega}\ (\theta).$$

Avuto il valore $cos^2\ \frac{1}{2} I$ si cerchi quello di $sen^2\ \frac{1}{2} I$ sottraendo (θ) da 1... $1 - cos^2\ \frac{1}{2} I = sen^2\ \frac{1}{2} I$

$$= \frac{1 + sen^2 E.\ tang^2 \omega - cos^2 E}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega} = \frac{sen^2 E + sen^2 E.\ tang^2 \omega}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega}$$

$$= \frac{sen^2 E\ (1 + tang^2 \omega)}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega} = \frac{sen^2 E\ sec^2 \omega}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega}\ (\eta).$$

92. Ma $cos\ I = cos^2\ \frac{1}{2} I - sen^2\ \frac{1}{2} I$; perciò si sottragga (η) da (θ).

$cos\ I = \frac{cos^2 E - sen^2 E\ sec^2 \omega}{1 + sen^2 E.\ tang^2 \omega}$ (ι). Si moltiplichi (η) per (θ).

$cos^2\ \frac{1}{2} I \times sen^2\ \frac{1}{2} I = \frac{cos^2 E\ sen^2 E.\ sec^2 \omega}{(1 + sen^2 E\ tang^2 \omega)^2}$ Si estragga la radice, e si raddoppî $2 cos\ \frac{1}{2} I\ sen\ \frac{1}{2} I = sen\ I$

$$= \frac{2\ cos\ E.\ sen\ E\ sec\ \omega}{1 + sen^2 E\ tang^2 \omega}\ (k)$$

si divida (ι) per (k) $\frac{cos\ I}{sen\ I} = cot\ I = \frac{cos^2 E - sen^2 E\ sec^2 \omega}{2\ cos\ E\ sen\ E\ sec\ \omega}$.

Si riduca ad espressione più semplice, avvertendo 1° che $sec^2 \cos^2 = 1$; 2° che $sen^2 = \cos^2 tang^2$. Dunque si moltiplichi $\cos E$ per $1$ cioè per $sec^2 \omega . \cos^2 \omega$, ed invece di $sen^2 E$ si metta $\cos^2 E \, tang^2 E$, onde si avrà

$\cot I = \frac{\cos^2 E . sec^2\omega . \cos^2\omega - \cos^2 E . tang^2 E . sec^2\omega}{2 \, sen \, E . \cos E \, sec \, \omega}$; e togliendo una volta i fattori comuni $\cos E . sec \, \omega$ avremo

$$\cot I = \frac{\cos E . sec\,\omega . \cos^2\omega - \cos E \, tang^2 E . sec\,\omega}{2 \, sen \, E}$$

$= \frac{\cos E \, sec \, \omega}{2 \, sen \, E} (\cos^2\omega - tang^2 E)$; ma $\frac{\cos}{sen} = \cot$, e $sec = \frac{1}{\cos}$ dunque $\cot I = \frac{\cot E}{2 \cos \omega} (\cos^2 \omega - tang^2 E)$. Or (90) ($\alpha$)

$r = - \cot I = \frac{\cot E}{2 \cos \omega} (tang^2 E - \cos^2 \omega)$.

93. Avuta finalmente la formola esaminiamo le

*Variazioni di $\omega$, e di $E$.*

1. Mutando $\omega$ in $-\omega$, cioè se l'angolo da un lato passa all'altro della meridiana *CM*, *r* avrà lo stesso valore, quindi la curva è simmetrica rispetto a *CM*, il quale sarà l'asse bisecante la curva.

2. Quando $\omega = 90°$, allora $r = \infty$ : ma quando $\omega = 0°$, allora $r = \frac{\cot E}{2} (tang^2 E - 1)$ $= - \frac{1}{2} (\cot E - tang \, E) = - \cot 2 E$.

3. Quando $\cos \omega = tang \, E$, allora $r = 0$, e la curva passa pel punto *P*. Dunque la curva cominciando a distanza infinita passa pel punto *P*, gira indietro con un nodo, che nell'asse arriva a distanza $\cot 2 E$; ri-

torna pel piede $P$, e ripassa simmetricamente dall'altro lato.

*Variazioni di $\omega$ relative ad $E$.*

FIG. 22. 4. Se $E = 45°$, e $\cos \omega = \tang 45° = 1$, sarà $r = 0$, ed $\omega = 0°$, quindi la meridiana $PO$ (*fig. 22*) sarà tangente ai due rami della curva nel punto $P$, il quale sarà punto di regresso, ed il nodo svanisce.

5. Se $E < 45$, allora $\tang E < 1$, e vi sarà un angolo $\omega$ che soddisfa all'equazione $\cos \omega = \tang E$ facilissimo a determinarsi geometricamente. Imperciocchè
FIG. 24. (*fig. 24*) aperto il compasso quanto l'altezza dell'indice $PL$, e fatto centro in $P$ si giri ad incontrare l'equinoziale in $B$ ed in $B'$, sarà $BPO = B'PO = \omega$, perchè nel triangolo $PLO$ si ha $PO = \tang E$, e nel triangolo $BPO$ si ha $PO = \cos \omega$ sotto lo stesso raggio $PB = PL$. Intanto $PB$ e $PB'$ sono tangenti ai due rami della curva nel punto $P$.

FIG. 25. Ovvero (*fig. 25*) sopra $PL = 1$ si costruisca un semicircolo, e presa $PO = \tang E$ si porti con un archetto in $C$, e si tirino le corde $PC$, $CL$; l'angolo $PLC$ avrà per seno $PC = PO = \tang E$. Ciò posto, si conduca da punto $P$ la linea $PB$ normale a $PC$: sarà $PB$ tangente alla curva nel punto $P$.

Segue da ciò che i due rami della curva si ergono in $P$ alla massima acutezza, quando $E = 45°$.

6. Intanto quando $\omega$ diminuisce, $\cos \omega > \tang E$, e nella formola il fattore $(\tang^2 E - \cos^2 \omega)$ diviene negativo, onde $r$ sarà negativo, cioè dalla parte opposta, ossia fuori dello spazio compreso fra le sezioni dell'equatore e del primo verticale.

Cosicchè quando $\omega$ diviene $0°$, ed il raggio vettore è nella meridiana $OC$ (*fig. 20*), allora si stende per la quantità $PT = cot\ 2E$ (2), nè può progredire indietro più oltre: di là dunque il nodo si rivolge per ritornare in $P$. Saravvi dunque in $T$ una tangente infinita.

7. Se $E > 45°$, sarà $tang \cdot E > 1$, ma $cos\ \omega$ non mai è maggiore $1$, dunque non vi sarà giammai $cos\ \omega = tang\ E$, e molto meno $cos\ \omega > tang\ E$, e perciò $r$ non sarà giammai $= 0$, e molto meno negativo. Dunque la curva non arriverà in $P$, e molto meno anderà indietro a chiudere nodo. (*fig. 23*) FIG. 23.

8. Intanto sempre quando $\omega = 0°$, sarà $r = cot\ 2E$. Esaminiamo questo valore. Sia $E = 45° + \delta$ avremo $-\ cot\ 2E = -\ cot\ (90° + 2\delta) = tang\ 2\delta$...onde $r = tang\ 2\delta$ positivo. Presa $PT = tang\ 2\delta$ dalla parte delle ascisse positive, la curva passa per $T$.

9. Se $E = 0°$, come avviene all' equatore, sarà $tang\ E = 0$, e $cot\ E = \infty$,

onde $r = \frac{\infty}{2\ cos\ \omega} \times (-cos^2\ \omega) = -\ \frac{1}{2}\ cos\ \omega\ \infty$. Valore cioè indeterminato nelle funzioni di $\omega$: imperciocchè $\omega$ all'equatore è costante: infatti se $r = -\frac{1}{2}\ cos\ \omega\ \infty$, si avrà $-\ cos\ \omega = \frac{2r}{\infty} = 0$, cioè $\omega = 90°$: la curva diviene una retta, e le sezioni orarie sono parallele alla meridiana come sezioni di meridiani. I raggi vettori coincidono sulla sezione del primo verticale, e questa confondesi coll'equinoziale. Contandosi gli angoli orari $P$ dall' orizzonte, $r = cot\ P$.

10. Se $E = 90°$, come avviene ai poli, sarà $tang\,E = \infty \ldots cot\,E = 0$, e la formola del raggio vettore diviene $r = \frac{\infty - 0}{2\cos\omega}$, onde il reggio vettore è infinito, cioè indefinito. Ai poli fa di orizzonte l'equatore: questo movendosi colla sfera si muove sopra se stesso, onde l'orizzonte mobile ed il fermo coincidono sempre, il loro angolo è $0°$ oppure $180°$. Le sezioni orarie per passare dall'orizzonte razionale sopra il visibile (§ 40, II) non l'incontrano che a distanza infinita: il raggio vettore è perciò infinito: la curva è imaginaria ec. ec.

FIG. 26. 94. Or queste cinque variazioni di $E$; cioè $1°\ E = 45°$ (4): $2°\ E < 45°$ (5): $3°\ E > 45°$ (7): $4°\ E = 0°$ (9): $5°\ E = 90°$ (10). Si possono vedere riunite *(fig. 26)* in una figura sintetica: da cui si deduce che la curva passa sempre per un punto $T$ nella meridiana a metà tra il punto equinoziale ed il centro del quadrante. Così sarà evidentissima la proposizione annunziata al § 37 ($\frac{2}{3}\ CM$) e dimostrata al § 49 dell' Esame V per $\frac{1}{2}\ BK$.

Sopra la linea $CO$ come diametro si costruisca la semicirconferenza $CAO$. Sia $C$ il centro del quadrante, $CO$ la meridiana, $O$ il punto equinoziale: i triangoli iscritti sieno triangoli polari, e le ordinate dal vertice sopra $CO$ rappresentino l'indice.

*Variazioni.*

1. Triangolo polare $CAO$: indice $AT \ldots E = 45°$; $2E = 90° = AO$ arco.

— $cot\ 2E = 0$: perciò il raggio vettore dista zero da $T$ piede dell'indice: resta dunque in $T$.

2. Triangolo polare $CIO$ : indice $IP...E < 45°$; $2E < 90° = IO$ arco.

— $cot\ 2E = — cot\ IO = PT$; considerandosi negativo il senso di direzione da $P$ verso $C$, e positivo da $P$ verso $O$.

3. Triangolo polare $CI'O$: indice $I'P'...E > 45°$; $2E > 90° = I'O$ arco.

— $cot\ 2E = — cot\ I'O = tang\ I'A = P'T$.

4. Triangolo $COO$, cioè la retta $CO$ per avere come indice infinitesimo il punto $O...E = 0°...2E = 0°$ = il punto $O$.

— $cot\ 2E = —\infty$, ed $OT$ rispetto all'unità $O$ un punto è infinita negativa cioè verso $C$.

5. Triangolo $CCO$, cioè la retta $CO$ per avere come indice infinitesimo il punto $C...E = 90°...2E = 180° = OAC$ arco.

— $cot\ 2E = \infty$, e $CT$ è infinita rispetto all'unità $C$ che è un punto.

Dunque in tutti i casi $T$ è sempre a metà di $CO$.

*N. B.* Le formole ai numeri 9 e 10 § 93 danno

1° $r = -\frac{1}{2} \cos \omega\ \infty$ cioè a metà dell'asse de' coseni cioè del diametro $CO$, nel senso negativo, dunque $OT$.

2° $r = \frac{\infty}{2 \cos \omega}$ cioè a metà dell'asse de' coseni cioè del diametro nel senso positivo, dunque $CT$.

Per conoscere altre affezioni della curva passiamo all'

## ESAME II.

*Equazione a coordinate rettangolari.*

95. Sia $FR$ fig. 20 perpendicolare a $TO$, e si faccia $FR = y \ldots PR = x \ldots$ sarà $PF = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\cos FPR = \cos\omega = \frac{PR}{PF} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ (1).$$

Si sostituiscano questi valori nell'equazione polare

$$r = \frac{\cot E}{2\cos\omega}(\tang^2 E - \cos^2\omega)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\cot E \sqrt{x^2 + y^2}}{2x}\left(\tang^2 E - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

tolto il fattore comune $\sqrt{x^2 + y^2}$ avremo;

$$1 = \frac{\cot E}{2x}\left(\tang^2 E - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Si moltiplichi per $2x(x^2 + y^2)$

$$2x(x^2 + y^2) = \tang E(x^2 + y^2) - x^2 \cot E$$

e riunendo i termini con $x^2 + y^2$ avremo

$$(x^2 + y^2)(\tang E - 2x) = x^2 \cot E.$$

$$x^2 + y^2 = \frac{x^2 \cot E}{\tang E - 2x} \ (2) \text{ onde}$$

$$y^2 = \frac{x^2 \cot E}{\tang E - 2x} - x^2 = \frac{x^2 \cot E - x^2 \tang E + 2x^3}{\tang E - 2x}$$

$$= x^2 \frac{\cot E - \tang E + 2x}{\tang E - 2x}$$

ma $\cot E - \tang E = 2\cot 2E$, dunque

$$y^2 = 2x^2 \frac{\cot 2E + x}{\tang E - 2x} \ (A).$$

$$y = \pm x \sqrt{2 \frac{\cot 2E + x}{\tang E - 2x}} \ (B)$$

*N. B.* L' equazione (A) è di terzo grado relativamente ad $x$.

### § 1. *Variazioni di $x$.*

1. Ad ogni valore di $x$ corrispondono due valori di $y$, uno positivo, ed uno negativo, e però la curva è simmetrica relativamente all' asse $TO$.

*$x$ primo fattore.*

2. Quando $x = 0$, sarà $y = 0$, onde la curva passa per $P$.

*$x$ nel numeratore cioè $\cot 2E + x$*

3. Quando $\cot 2E + x = 0 .. x = -\cot 2E ..$ sarà $y = 0$
Dunque presa $PT$ dalla parte delle ascisse negative $= \cot 2E$, la curva passerà per $T$.

*$x$ nel denominatore cioè $\tan E - 2x$*

4. Quando $\tan E - 2x = 0 ... x = \frac{1}{2} \tan E$ sarà $y = \infty$.

Or $\tan E = PO$: dunque per $M'$ medio di $PO$ si tiri $zz'$ parallela ad $NL$, e perpendicolare a $PM$; questa linea sarà l' asintoto della curva, e la tangente ai suoi estremi

*$x$ pe' due segni $\pm$*

5. Considerando le ordinate positive appartenenti al ramo della curva $xFP$, e fatto $x$ positivo la (B) dà

$$y = x \sqrt{2 \frac{\cot 2E + x}{\tan E - 2x}}$$

la quale mutato $x$, in $-x$, diviene

$$y = - x \sqrt{2 \frac{\cot 2E - x}{\tan + 2x}}$$

dunque le ordinate positive passano a negative, ed ogni loro valore è doppio pel doppio segno proprio del radicale.

Le ordinate sono reali, finchè $x < cot\, 2E$, cioè $x < PT$: quando $x = cot\, 2E$, divengono $= 0$. Sarebbero imaginarie, se avvenisse che $x > cot\, 2E$. Dunque quando $x = PT$ si compisce metà del nodo girando da $P$ per $d$ in $T$, donde dall'altro lato per $c$ ritorna in $P$. Intanto da principio in $P$ (§ 1, 2) $x = 0 \ldots y = 0$; cresce $-x$, e le ordinate $-y$ prima crescono e poi diminuiscono, finchè $-x = -cot\, 2E \ldots y = 0$. Decrescendo $-x$, le ordinate divengono positive (cioè la curva gira dall'altro lato) prima crescono, e poi diminuiscono, finchè $x = 0 \ldots y = 0$.

Chiuso il nodo, le ordinate tornano negative, e si forma il ramo $Pcy$ simmetricamente dall'altro lato.

Le ordinate nel giro del nodo avranno due volte il maximum uno positivo ed uno negativo con due valori uguali $-x$, il primo al crescere di $-x$ da zero a $cot\, 2E$, ed il secondo al decrescere da $cot\, 2E$ a zero. L'asse maggiore del nodo $= -cot\, 2E$, l'asse minore $= 2y$ nel maximnm indicato.

Segue da ciò, che i due rami della curva $xFP$, ed $y\,c\,P$ si tagliano in $P$ ad angolo $2\omega$ (fatto $cos\, \omega = tang\, E$ num. 93, 5°). Girano a formare il nodo in questa guisa: il ramo positivo $xFP$ toccando $P$ passa a negativo in $PdT$, ed il ramo negativo $ycP$ passa a positivo in $P$ e $T$, dove il nodo è chiuso in arco. La forma dunque del nodo è a cuore, acuto in $P$ per l'angolo $2\omega$, curvato in $T$, alto $cot\, 2E$, largo $2y$,

stando $y$ maximum in un valore di $-x < cot\ 2E$, che l' analisi darà appresso al § 97.

§ 2 *Variazioni di E.*

6. Se $E = 45°$, sarà $tang\ E = 1 \ldots cot\ 2E = 0$, onde l'equazione (A) diviene $y^2 = \frac{2x^3}{1-2x}$. Se $x$ è negativo, si ha $y = -x\sqrt{-\frac{2x}{1+2x}}$ quantità imaginaria, e perciò il nodo svanisce.

7. Se $E = 45° + \delta$, l'equazione (A) diviene

$$y^2 = 2x^2 \frac{x - tang\ 2\delta}{tang\ (45 + \delta) - 2x}$$

Or in questa equazione, quando $x = tang\ 2\delta$, sarà $y = 0$: se però $x < tang\ 2\delta$, sarà $y$ imaginaria, dunque la curva tocca l'asse $PO$ al punto $T$ (*fig. 23*) distante dall'origine $P$ la quantità $PT = tang\ 2\delta$, e si distende ai due lati di $TM$.

Veggiamo la figura della curva in questo punto $T$, facendo l'analisi nell'

## ESAME III.

*Delle tangenti.*

96. Condotta (*fig. 20*) una tangente $acb$ al punto $c$ si ha che $tang\ baO = \frac{dy}{dx} = y'$. Dunque (A) posta nella forma

$y^2 = 2\left(\frac{x^2 \cot 2E + x^3}{\tang E - 2x}\right)$ differenziata dà

$yy' = \frac{(\tang E - 2x)(2x \cot 2E + 3x^2) + 2(x^2 \cot 2E + x^3)}{(\tang E - 2x)^2}$ : ma

$2 \cot 2E = \cot E - \tang E$ dunque il numeratore può trasformarsi in $(\tang E - 2x)(x \cot E - x \tang E + 3x^2) + x^2 \cot E - x^2 \tang E + 2x^3$; ossia $x - x \tang^2 E + 3x^2 \tang E - 2x^2 \cot E + 2x^2 \tang E - 6x^3 + x^2 \cot E - x^2 \tang E + 2x^3$, e riducendo i termini simili, e rimettendo l'equazione

$$yy' = \frac{x - x \tang^2 E + 4 x^2 \tang E - x^2 \cot E - 4 x^3}{(\tang E - 2x)^2}:$$

ma nella (B)

$$y = \pm x \sqrt{2 \frac{(\cot 2E + x)}{\tang E - 2x}} = \pm x (\tang E - 2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$\sqrt{2}(\cot 2E + x)$: per cui dividendo si avrà

$$y' = \frac{x(1 - \tang^2 E) + x^2 (4 \tang E - \cot E) - 4x^3}{(\tang E - 2x)^2 x (\tang E - 2x)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2(\cot 2E + x)}}$$

$$= \frac{1 - \tang^2 E + x(4 \tang E - \cot E) - 4x^2}{(\tang E - 2x)^{3/2} \sqrt{2(\cot 2E + x)}} \quad (C)$$

97. Avuta la formola è bene esaminarla attentamente

I. Se il numeratore va a zero, $y' = 0$, ed $y$ è l'ordinata massima del nodo sotto il valore $-x$ da ricavarsi. Ciò si ottiene così:

$1 - \tang^2 E + x(4 \tang E - \cot E) - 4x^2$, diviene pel $-x$

$1 - \tang^2 E - x(4 \tang E - \cot E) - 4x^2 = 0$...cioè

$x^2 + \frac{1}{4} x (4 \tang E - \cot E) = \frac{1 - \tang^2 E}{4}$; d'onde

$$x = \frac{\cot E - 4 \operatorname{tang} E}{8} \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tang}^2 E}{4} + \frac{(4 \operatorname{tang} E - \cot E)^2}{64}}$$

moltiplicando per 16 i termini della prima frazione radicale $\frac{1 - \operatorname{tang}^2 E}{4}$ e riducendo si ha

$$x = \frac{\cot E - 4 \operatorname{tang} E \pm \sqrt{8 + \cot^2 E}}{8}.$$

Fatto il calcolo per $E = 38°, 6', 44''$ si trova prendendo il radicale positivo

$$x = 0{,}15495, \text{ ed } y = \pm\ 0{,}06293$$

ma prendendo il radicale negativo $y$ è imaginaria perchè $x > \cot 2E$, e $2x > \operatorname{tang} E$

Intanto § 95, 5, deve essere $x < \cot 2E$ cioè di $\frac{\cot E - \operatorname{tang} E}{2}$ dunque

$$\pm \frac{\sqrt{8 + \cot^2 E} + \cot E - 4 \operatorname{tang} E}{8} < \frac{\cot E - \operatorname{tang} E}{2}$$

$$\pm \sqrt{8 + \cot^2 E} + \cot E - 4 \operatorname{tang} E < 4 \cot E - 4 \operatorname{tang} E,$$

e levando le quantità comuni $\pm \sqrt{8 + \cot^2 E} < 3 \cot E$; ed elevando al quadrato

$8 + \cot^2 E < 9 \cot^2 E$, e togliendo una volta $\cot^2 E$ $8 < 8 \cot^2 E$, cioè $\cot^2 E > 1$, e quindi $\cot^2 E > 1$, e $\operatorname{tang} E < 1$.

Dunque $E < 45°$, per verificarsi il nodo, come si disse al § 93, 5.

II. Quando un fattore qualunque del denominatore è uguale a zero allora $y' = \infty$, ed in questo caso la tangente della curva sarà perpendicolare all' asse $TM$. Or ciò avviene

1. Quando $\operatorname{tang} E - 2x = 0$... cioè $x = \frac{1}{2} \operatorname{tang} E$

Questo conferma l'esistenza degli asintoti in linea retta, che partono da $M'$ a metà di $PO$, e sono perpendicolari a $TM$.

2. Quando $cot\ 2E+x=0$; cioè $x=-cot 2E=PT$.

Ciò è vero sempre comunque sia $E<>45^\circ$. Infatti se $E<45^\circ$, sarà $2E<90^\circ$, onde $cot\ 2E$ è negativa, e perciò vi sarà una tangente $Tt$ (*fig. 20*) perpendicolare all'asse nell'estremità $T$ dell'ascissa $PT$ negativa cioè dalla parte opposta all'equinoziale, dove i due rami della curva chiudono il nodo ad arco convesso.

Se $E>45^\circ$, sarà $2E>90^\circ$, e $cot\ 2E$ positiva $=tang\ 2\delta$: dunque (*fig. 23*) presa $x=PT=tang\ 2\delta$ dalla parte delle ascisse positive, la tangente nel punto $T$ sarà perpendicolare all'asse $PM$. Ciò mostra che in $T$ la curva presenta una concavità all'asse delle ascisse, nè più si erge ad angolo acuto verso $P$. Intanto per ragione dell'asintoto $zz'$ deve presentare all'equinoziale una convessità, dunque vi sarà un punto di passaggio o di flesso, che potrebbe determinarsi.

III. Quando $x=0$, e la curva passa pel piede dell'indice, allora la formola (C) diviene

$$y'=\frac{1-tang^2\ E}{tang^{3/2}\ E\sqrt{2\ cot\ 2E}}=\frac{1-tang^2\ E}{tang\ E\sqrt{tang\ E(cot\ E-tang\ E)}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-tang^2\ E}\sqrt{1-tang^2\ E}}{tang\ E\sqrt{1-tang^2\ E}}=\sqrt{\frac{1-tang^2\ E}{tang^2\ E}}$$

$=\sqrt{cot^2\ E-1}$. Dunque per aversi la tangente al piede dell' indice è necessario, che questo valore non sia imaginario, e $cot^2\ E>1 \ldots cot\ E>1 \ldots tang.\ E<1$

cioè $E < 45°$. Che se poi $E = 45°$, allora $y' = 0$, cioè la tangente al punto $P$ coincide coll'asse $TM$, dunque i due rami della curva in $P$ *(fig. 22)* sono spinti in su ad angolo acutissimo, e $P$ è il punto di regresso.

### § 4. *Valori FB ed FK del raggio vettore.*

1. $FB$ prolungamento del raggio vettore da $F$ all'equinoziale in $B$.

2. $FK$ prolungamento da $F$ al circolo polare in $K$.

98. Già si mostrò nell'Esame V, che $FB = FK$ perchè uguali ad $FI = cosec\ I$, cioè $\sqrt{1 + r^2}$, veggiamolo divisamente colla forma del calcolo adottato per la curva, di cui questo valore è una notabile proprietà.

I. Si prolunghi *(fig. 20)* il raggio vettore $PF$ sino all'incontro dell'equinoziale in $B$. I triangoli simili $PFR$, $PBO$ danno $PR : RO = PF : FB$

cioè $x : tang\ E - x = \sqrt{x^2 + y^2} : FB$;

ma (2) § 95 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\dfrac{x^2 \cot E}{tang\ E - 2x}}$,

dunque $FB = (tang\ E - x) \sqrt{\dfrac{\cot E}{tang\ E - 2x}}$

che posto sotto il radicale diviene $\sqrt{\cot E \dfrac{(tang\ E - x)^2}{tang\ E - 2x}}$

Si svolga e si riduca la frazione

$$\frac{tang^2\ E - 2x\ tang\ E + x^2}{tang\ E - 2x} = tang\ E + \frac{x^2}{tang\ E - 2x},$$

onde $FB = \sqrt{\cot E \left(tang\ E + \dfrac{x^2}{tang\ E - 2x}\right)}$

$= \sqrt{}\left(cot\ E\ tang\ E + \frac{x^2\ cot\ E}{tang\ E - 2x}\right)$ di cui il primo fattore $= 1$, ed il secondo $= r^2$: dunque

$$FB = \sqrt{1 + r^2} = FI.$$

II. Or si aggiunga al raggio vettore $FP$ il suo prolungamento $PK$ sino al circolo polare costrnito sul diametro $cot\ E$.

Si chiami $PK = z = cot\ E\ cos\ \omega$.

Nella (1) delle coordinate § 95.

$$cos\ \omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ onde } z = \frac{2x^2\ cot\ E}{2x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ed appresso nel medesimo § 95

$$r = \frac{cot\ E\sqrt{x^2+y^2}}{2x}\left(tang\ E^2 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{tang\ E\ (x^2 + y^2) - x^2\ cot\ E}{2x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

dunque $r + z = \dfrac{tang\ E\ (x^2 + y^2) + x^2\ cot\ E}{2x\sqrt{x^2 + y^2}}$

$(r+z)^2 = \dfrac{tang^2\ E\ (x^2+y^2)^2 + 2x^2\ (x^2+y^2) + x^4\ cot^2\ E}{4x^2\ (x^2 + y^2)}$, ed

$r^2 = \dfrac{tang^2\ E\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2\ (x^2 + y^2) + x^4\ cot^2\ E}{4x^2\ (x^2 + y^2)}$

Queste due equazioni differiscono di $\dfrac{4x^2(x^2+y^2)}{4x^2(x^2+y^2)} = 1$

dunque $(r + z)^2 = 1 + r^2$; $r + z = \sqrt{1 + r^2}$, dunque $FK = FI$. Quindi da $F$, dove l'oraria incontra il raggio vettore, vi è ad incontrare l'equinoziale una distanza $FB$ uguale ad $FK$ per toccare il cerchio polare.

## COROLLARIO

99. Dividendo dunque i $BK$ in due parti uguali, si troveranno i punti $F$ o per descrivere con essi la curva, o per condurre ad essi le orarie. (Parte II § 2 dircz. norm. metodo 2).

100. Basta anche ad ottenere i punti $F$ la bisezione di $IB$.

Sia (*fig*. 28) la retta $PB$ condotta da $P$ piede dell'indice sino in $B$ all'incontro dell'equinoziale: si elevi da $P$ sopra $PB$ la perpendicolare $PI$ uguale all'indice $PL$, e si conduca $IB$. Da $Q$ medio di $IB$ tirata una perpendicolare incontrerà $F$, perchè $IF = FB$ come si è dimostrato § 48.

Per non ripetere la costruzione ad ogni raggio vettore, bisognano le seguenti operazioni:

1. Fatto centro in $P$ si trasportano sulla meridiana $TM$ i raggi $PB$, $PB'$, $PB''$ ec. cogli archi $Bb$, $B'b'$, $B''b''$ ec.

2. Si prenda sopra $NL$ la $PL = PI$, e da $L$ si conducono $Lb$, $Lb'$ $Lb''$ ec.

3. Divisa la $PL$ in due parti uguali in $K$, si tiri $KR$ parallela a $TM$, e dividerà le $Lb$, $Lb'$, $Lb''$ ec. in due parti uguali $q$, $q'$, $q''$ ec. da cui si dirigono le perpendicolari $qf$, $q'f'$, $q''f''$.

4. Si riportano le $Pf$, $Pf'$, $Pf''$ ec. sui rispettivi raggi vettori, e si avranno i punti $F$, $F'$, $F''$, ec. della curva. La perpendicolare da $q^{v}$ diretta da $\frac{1}{2}$ $LO$ determina il punto $T$ nell'asse $TM$, dove piega il primo ramo $x$ della curva, e dove l'altro simmetrico $y$ anderebbe a chiudere il nodo.

# Conchiusione

Terminata l' opera, ne ho voluto formare da me stesso il sommario, e ciò per due gravissime ragioni.

La prima per presentare un quadro ragionato delle materie, nel quale si distinguesse l'andamento dell'analisi per arrivare alla scoperta della nuova teoria, e si riunisse sotto un colpo d'occhiò tutto il lavoro.

La seconda per togliere l' incomodo a chi volesse giudicare della mia opera, di formarne da se un sunto arbitrario, e farmi dire quello che io non ho detto.

Io annunzio una nuova teoria da me scoperta e dimostrata, ma non è tutto nuovo quello che io dico, anzi vi è molto del vecchio. Era necessario, che io partissi da principî certi evidenti ed antichi, per arrivare a risultati ugualmente certi ed evidenti, ma nuovi.

Stabilito nell' introduzione (pag. 3) lo scopo dell' opera e la sua divisione, do principio alla prima parte delle dimostrazioni teoriche.

Nelle idee preliminari (pag. 5) introduco la prima novità dell' orizzonte *mobile*. Gli antichi conobbero, che i cerchi orari italiani e babilonesi sono circoli massimi tangenti ai due paralleli massimo visibile ed invisibile, ma considerandoli nella sfera ferma non avvertirono che le loro posizioni sono quelle stesse, che prenderebbe l'orizzonte, se si movesse. Intanto presentando la questione sotto il nuovo aspetto, diviene più semplice e più evidente: ed insistendo ad esaminarla sempre meglio, si arriva a scoprire delle verità che prima non apparivano.

Esame I (pag. 7). Giacchè l'orizzonte non è toccato dal sole in tutti i snoi pnnti, ma solamente in alcuni, che si allontanano per pochi gradi dal vero oriente e dal vero occidente, fu mestieri determinare il loro nnmero, e stabilire la dnrata del loro moto nel corso del giorno.

Il calcolo dell'ampiezza e degli archi semidinrni è antichissimo, ma qui l'applicazione ne è nnova. Gli antichi non conobbero un analemma de' segni preso dall'ampiezza : questa mia scoperta favorisce il disegno di formare una teoria indipendente dall'orologio astronomico anche per le curve de' tropici. Gli archi semidiurni poi servono per me non tanto a conoscere la durata del giorno ne' diversi gradi di declinazione del sole, quanto per determinare i punti dell'orizzonte mobile che successivamente van sotto o restano sopra dell'orizzonte fermo.

Le costrnzioni piane fan divenire le dimostrazioni più chiare col renderle visibili, e le variazioni esaminate per tntti i casi determinano con esattezza le idee generali.

Esame II. (pag. 12) L'orizzonte movendosi colla sfera si eleva da un capo e si abbassa dall'altro, ed al tempo stesso la sna sezione sull'orizzonte fermo devia dalla meridiana. L'analisi dà snbito nn risnltato nuovo, cioè che qnanto il punto $O$ (fig. 5) dell'orizzonte mobile in contatto col parallelo massimo visibile si eleva sull'orizzonte fermo portandosi in $O'$, tanto la sezione oraria che ne nasce devia dalla meridiana, e tanto il vertice $V$ dell'orizzonte mobile si

scosta da $E'$ suo punto equinoziale, onde $AO=AO'=VE'$.

Di più la projezione di $V$ sul piano dell'orologio descrive la curva orizzontoide. A sviluppare con chiarezza tante cose vivissime nella mia imaginazione mi convenne adoperare ordine e diligenza.

Studiando il moto del circolo orario (pag. 17) mi accorsi che in qualche posizione doveva divenir verticale: imperciocchè facendo prima angolo acuto e dopo ottuso sul piano dell'orologio, doveva in un intermedio farvelo retto. Trovai (pag. 20) l'esatta posizione, ed assegnai l'ora certa del fenomeno dipendenti dall'elevazione del polo. Così i verticali italiano e babilonese possono dirsi due nuove meridiane degne di costruirsi per osservarvi il passaggio degli astri; notando in essi l'ampiezza, come al meridiano si nota la declinazione; o applicandole agli usi civili.

Esame III. (pag. 26). Questo esame non presenta niente di nuovo, ma era necessario partire dai punti equinoziali pe' risultati nuovissimi dell'

Esame IV. (pag. 29) Or qui è il forte della teoria. L' orizzonte mobile fa sempre sul fermo due angoli la cui somma = 180°. Uno di questi angoli è bisecato sempre da un meridiano, e l'altro da un circolo massimo che ha sempre il vertice nell'equatore, la loro sezione nella sfera è comune con quella del circolo orario. Oltre a ciò esaminai un circolo azimutale che fosse perpendicolare ai tre precedenti ed alle loro sezioni nel piano dell'orologio. Gli antichi conobbero, che le sezioni orarie italiane e babilonesi sono parallele a

quella di qualche meridiano (Vedi Charles Gnomonica). ma non la determinarono geometricamente: contenti di ciò non andarono più oltre, nè si posero ad introdurre altri circoli, per timore fosse di complicare la teoria. I miei esami però mi condussero a risultati nuovissimi e semplicissimi.

Esame V. (pag. 33) Considero projettali nel piano del verticale il circolo orario, ed i due circoli bisecanti gli angoli d' inclinazione, che quello forma sull' orizzonte tanto razionale che visibile. La sezione del verticale coll'orizzonte visibile mi dà tutto il raggio vettore; le sezioni de' circoli bisecanti ne determinano la lunghezza tra l' equinoziale ed il circolo polare; quella dell' orario ne segna giusto nel mezzo il punto $F$, che descrive la curva. Intanto mi fu necessario investigare i rapporti dell'angolo orario con quello d'inclinazione, e delle loro metà nella determinazione del punto $F$, per assicurare così le prime tracce delle sue variazioni.

Gli Esami VI (pag. 37) e VII (pag. 43) servono a rendere la teoria più evidente, presentandola in aspetto più semplice e meno astratto. Per mezzo di una costruzione lineare assai facile si mettono prima in più chiaro lume le formole per gli angoli di deviazione e d'inclinazione, e poi si fa un confronto per l'identità della presente costruzione lineare colla precedente costruzione sferica. In questi due ultimi esami ebbi anche per iscopo disporre il lettore alle operazioni pratiche: cosicchè quello che qui aggiunsi di più mi serve per mettere colà di meno, onde farmi capire con maggiore brevità e chiarezza.

Termina questa prima parte con un appendice (pagina 44) da riferirsi all'esame III. Il metodo geometrico di dividere l'equatore di *15°*, in *15°* gradi incominciando dal punto di contatto di una tangente è certamente antico, ed appunto perciò fu rimesso ad un' appendice. Egli non fa parte della nuova teoria, pure le reca qualche servizio, facendo vedere l' uso delle secanti che trasportate a destra ed a sinistra eseguiscono le suddivisioni.

La parte seconda (pag. 51) delle operazioni pratiche è brevissima, appunto per vedersi il vantaggio della nuova teoria.

Anzi la mia pratica nell'uso può considerarsi come più breve, giacchè non è necessario in ogni linea adoperare tutti i metodi che si descrivono, quantunque il conoscerli tutti renda le operazioni più spedite e più sicure.

Il preambolo serve solo per comprendere la figura grande della tav. III. Ella è di sommo interesse, perchè comprende come in un quadro sinottico tutta la teoria e la pratica. Al primo rimirarla, pare complicata di molte linee, pure facendo alcun poco di attenzione, se ne vedrà distinta la specie ed elegante la simmetria.

Gli articoli della pratica (pag. 54) sono ben pochi di numero, cioè i soli necessarî:

1. Per la direzione in generale delle linee orarie;
2. Per la direzione normale al raggio vettore;
3. Per la direzione parallela al meridiano bisecante;
4. Per la lunghezza residua delle orarie, i cui estremi definiscono le curve dei tropici.

L'applicazione generale (pag. 59) della teoria è un'aggiunta, che mi venne in mente, quando già i rami erano incisi e la stampa era arrivata a questo punto. Egli è perciò che non ha figura sua propria come forse richiederebbe: pure un lettore istruito mi comprenderà facilmente, quantunque la tangente che io chiamo *direttrice* per dividere in gradi l'equatore sia una mia novità. Essa è necessaria, perchè la divisione incominci dal meridiano del paese, e non già dalla sostilare del muro.

La parte III dell'esercitazioni analitiche (pag. 63) è divisa in due capitoli, nel primo si tratta delle quantità da calcolarsi riferite alla fig. 14, e nel secondo si fa l'analisi della curva orizzontoide.

Prima dunque si dà ragione delle tavole, le quali però sono rimesse alla fine per maggior comodo dei leggitori. I rapporti degli angoli di deviazione e d'inclinazione furono il primo tentativo del mio studio intorno alle variazioni dell'orizzonte *mobile* sul fermo, ed intorno alle sezioni orarie che ne derivano. Questa fu la prima mia idea: vi lavorai sopra calcolando, ma il risultato che allora ne ebbi fu dubbioso e meschino. Cercai verificare i calcoli delineando figure, tirando normali dal piede dell'indice alle sezioni orarie e prolungandole sino all'equinoziale. Mi accorsi che il loro angolo era necessariamente uguale a quello della deviazione. Considerai l'indice verticale sul piano dell'orologio, condussi dal suo vertice due linee, una al punto *F* (fig. 14) e l'altra al punto *E*: trovai che il loro angolo è anche uguale alla deviazione, ed il

loro piano è quello stesso del circolo orario. Così mi nacque l'idea del raggio vettore, del verticale comune, della curva ec. La teoria prese forma, e diede il lampo della novità. Dovendo esporla con ordine analitico, i calcoli di primo lavoro dovettero rigettarsi all'ultimo, e divenire un semplice ornamento, le altre cose nascevano scrivendo.

Nel capitolo II (pag. 70) è analizzata la nuova curva con tre esami, il primo dell'equazione polare, il secondo di quella a coordinate rettangolari, il terzo delle tangenti. Le variazioni al tempo stesso che studiano con diligenza i dettagli minuti, completano a rigore l'idee generali. Conchiudo.

I raggi vettori e la curva orizzontoide formano la novità della teoria: ed il trasporto a destra ed a sinistra delle cosecanti orarie sono la novità della pratica.

Se alcuno vi troverà degli errori, mi farà cosa gratissima ad avvertirmene. Io ne ho trovato nella stampa alcuni, sfuggiti al solito alla diligenza del tipografo; perciò metto in fine l'indispensabile *errata corrige*.

FINE.

# INDICE DELLE MATERIE



**Parte I. Dimostrazioni teoriche.**

**Parte II. Operazioni pratiche.**



**Parte III Esercitazioni analitiche.**

*Tav. I.* **Calcolo della deviazione e dell'inclinazione dei circoli orarî nelle ore italiani civili.**

Formole I. $l\,tang\,D = l\,tang\,\frac{1}{2}P + l\,sen\,E$. II. $l\,cos\,\frac{1}{2}I = l\,sen\,\frac{1}{2}P + l\,cos\,E$.

| ORE | ½ P ° | ½ P ' | l t. ½ P | + l sen E 9.79043 | − lt. D ° | − lt. D ' | − lt. D " | l sen ½ P | + l cos E 9.89587 | l cos ½ I ° | l cos ½ I ' | l cos ½ I " | ½ I ° | ½ I ' | ½ I " | I ° | I ' | I " |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 3 | 45 | 8.81653 | 8.60696 | 2 | 19 | » | 8.81560 | 8.71147 | 87 | 3 | 1 | 2 | 56 | 59 | 5 | 53 | 58 |
| 22 | 11 | 15 | 9.29866 | 9.08909 | 6 | 59 | 57 | 9.29024 | 9.18611 | 81 | 10 | 12 | 8 | 49 | 48 | 17 | 39 | 36 |
| 21 | 18 | 45 | 9.53078 | 9.32121 | 11 | 59 | 59 | 9.50710 | 9.40297 | 75 | 21 | » | 14 | 39 | » | 29 | 18 | » |
| 20 | 26 | 15 | 9.69298 | 9.48341 | 16 | 55 | 44 | 9.64571 | 9.54158 | 69 | 38 | 5 | 20 | 21 | 55 | 40 | 43 | 50 |
| 19 | 33 | 45 | 9.82489 | 9.61532 | 22 | 24 | 40 | 9.74474 | 9.64061 | 64 | 4 | 44 | 25 | 55 | 16 | 51 | 50 | 32 |
| 18 | 41 | 15 | 9.94299 | 9.73342 | 28 | 25 | 32 | 9.81911 | 9.71498 | 58 | 45 | » | 31 | 15 | » | 62 | 30 | » |
| 17 | 48 | 45 | 0.05701 | 9.84744 | 35 | 8 | 13 | 9.87613 | 9.77200 | 53 | 43 | 57 | 36 | 16 | 3 | 72 | 32 | 6 |
| 16 | 56 | 15 | 0.17511 | 9.96554 | 42 | 43 | 45 | 9.91985 | 9.81572 | 49 | 8 | 24 | 40 | 51 | 36 | 81 | 43 | 12 |
| 15 | 63 | 45 | 0.30702 | 0.09745 | 51 | 22 | 30 | 9.95273 | 9.84860 | 45 | 7 | » | 44 | 53 | » | 89 | 46 | » |
| 14 | 71 | 15 | 0.46922 | 0.25965 | 61 | 11 | 24 | 9.97632 | 9.87219 | 41 | 50 | 10 | 48 | 9 | 50 | 96 | 19 | 40 |
| 13 | 78 | 45 | 0.70134 | 0.49177 | 72 | 8 | 14 | 9.99157 | 9.88744 | 39 | 29 | 40 | 50 | 30 | 20 | 101 | » | 40 |
| 12 | 86 | 15 | 1.18347 | 0.97390 | 83 | 56 | 18 | 9.99907 | 9.89494 | 38 | 16 | 6 | 51 | 43 | 54 | 103 | 27 | 48 |
| 11 | 93 | 45 | *Negat.* 1.18347 | 0.97390 | 96 | 3 | 42 | 9.99907 | 9.89494 | 38 | 16 | 6 | 51 | 43 | 54 | 103 | 27 | 48 |
| 10 | 101 | 15 | 0.70134 | 0.49177 | 107 | 51 | 46 | 9.99157 | 9.88744 | 39 | 29 | 40 | 50 | 30 | 20 | 101 | » | 40 |
| 9 | 108 | 45 | 0.46922 | 0.25965 | 118 | 48 | 36 | 9.97632 | 9.87219 | 41 | 50 | 10 | 48 | 9 | 50 | 96 | 19 | 40 |

**Tav. II.** Calcolo della deviazione e dell'inclinazione de' circoli orarî nelle ore babilonesi.

Formole I. $l\ tang\ D = l\ tang\ \frac{1}{2} P + l\ sen\ E$. II. $l\ cos \frac{1}{2} I = l\ sen\ \frac{1}{2} P + l\ cos\ E$.

| ORE | ½ P | | l tan ½ P | + l sen E 9.79043 | − lt D | | | l sen ½ P | + l cos E 9.89587 | − l c ½ I | | | ½ I′ | | | I′ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ′ | | | ° | ′ | ″ | | | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ |
| 1 | 7 | 30 | 9.11843 | 8.90886 | 4 | 38 | 5 | 9.11570 | 9.01157 | 84 | 6 | 19 | 5 | 53 | 41 | 11 | 47 | 22 |
| 2 | 15 | » | 9.42805 | 9.21848 | 9 | 23 | 26 | 9.41300 | 9.30887 | 78 | 15 | » | 11 | 45 | » | 23 | 30 | » |
| 3 | 22 | 30 | 9.61722 | 9.40765 | 14 | 20 | 28 | 9.58284 | 9.47871 | 72 | 28 | 32 | 17 | 31 | 28 | 35 | 2 | 56 |
| 4 | 30 | » | 9.76144 | 9.55187 | 19 | 26 | 50 | 9.69897 | 9.59484 | 66 | 50 | » | 23 | 10 | » | 46 | 20 | » |
| 5 | 37 | 30 | 9.88498 | 9.67541 | 25 | 20 | 30 | 9.78445 | 9.68032 | 61 | 22 | 50 | 28 | 37 | 10 | 57 | 14 | 20 |
| 6 | 45 | » | 0.00000 | 9.79043 | 31 | 41 | » | 9.84949 | 9.74536 | 56 | 11 | 44 | 33 | 48 | 16 | 67 | 36 | 34 |
| 7 | 52 | 30 | 0.11502 | 9.90545 | 38 | 48 | 44 | 9.89947 | 9.79534 | 51 | 22 | 30 | 38 | 37 | 30 | 77 | 15 | » |
| 8 | 60 | » | 0.23856 | 0.02899 | 46 | 54 | 40 | 9.93753 | 9.83340 | 47 | 2 | 50 | 42 | 57 | 10 | 85 | 54 | 20 |
| 9 | 67 | 30 | 0.38278 | 0.17321 | 56 | 8 | 4 | 9.96562 | 9.86149 | 43 | 22 | 10 | 46 | 37 | 50 | 93 | 15 | 40 |
| 10 | 75 | » | 0.57195 | 0.36238 | 66 | 32 | » | 9.98494 | 9.88081 | 40 | 32 | 10 | 49 | 28 | 50 | 98 | 55 | 40 |
| 11 | 82 | 30 | 0.88057 | 0.67100 | 77 | 57 | 32 | 9.99627 | 9.89214 | 38 | 43 | 55 | 51 | 16 | 5 | 102 | 32 | 10 |
| 12 | 90 | » | Inf. posit. | ........... | 90 | » | » | 0.00000 | 9.89587 | 38 | 6 | 44 | 51 | 53 | 16 | 103 | 46 | 32 |
| 13 | 97 | 30 | 0.88057 | 0.67100 | 102 | 2 | 28 | 9.99627 | 9.89214 | 38 | 43 | 55 | 51 | 16 | 5 | 102 | 32 | 10 |
| 14 | 105 | » | 0.57195 | 0.36938 | 103 | 28 | » | 9.98494 | 9.88081 | 40 | 32 | 10 | 49 | 27 | 50 | 98 | 55 | 40 |

Calcolo sulla fig. 14 per trovare i valori $OE$ ed $EB$; $OB$ ed $OA$.

Formole I. $l\ OE = l \cot P + l' \cos E$. II. $l\ EB = l' \operatorname{sen} P + l' \cos E$.

*Tav. III.* PER LE ORE ITALIANE CIVILI.

| ORE | | | P ° | P ' | l cot P | l' sen P | l' cos E 0.10413 | l EB | OE | EB | EB + OE − OB | EB − OE − OA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 18 | » | 82 | 30 | 9.11943 | 0.00373 | 9.22356 | 0.10786 | 0.1673 | 1.2819 | 1.4492 | 1.1146 |
| 16 | 19 | » | 67 | 30 | 9.61722 | 0.03458 | 9.72135 | 0.13851 | 0.5264 | 1.3757 | 1.9021 | 1.2493 |
| 16 | 20 | » | 52 | 30 | 9.88498 | 0.10053 | 9.98911 | 0.20466 | 0.9752 | 1.6020 | 2.5772 | 0.6268 |
| 14 | 21 | 9 | 37 | 30 | 0.11502 | 0.21555 | 0.21915 | 0.31968 | 1.6563 | 2.0926 | 3.7489 | 0.4363 |
| 13 | 22 | 10 | 22 | 30 | 0.38277 | 0.14716 | 0.48691 | 0.52129 | 3.0684 | 3.3212 | 6.3896 | 0.2528 |
| 12 | 23 | 11 | 7 | 30 | 0.88077 | 0.88430 | 0.98470 | 0.98843 | 9.6539 | 9.7375 | 19.3914 | 0.0836 |

*Tav. IV.* PER LE ORE BABILONESI.

| ORE | | | P ° | P ' | l cot P | l' sen P | l' cos E 0.10413 | l EB | OE | EB | EB + OE − OB | EB − OE − OA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| » | 6 | » | 90 | » | *Inf. neg.* | 0.00000 | *Inf. neg.* | 0.10413 | *zero* | 1.2703 | 1.2709 | 1.2709 |
| 7 | 5 | » | 75 | » | 9.42805 | 0.01506 | 9.53218 | 0.11919 | 0.3406 | 1.3158 | 1.6564 | 0.9782 |
| 8 | 4 | » | 60 | » | 9.76144 | 0.06247 | 9.86557 | 0.16660 | 0.7337 | 1.4675 | 2.2013 | 0.7339 |
| 9 | 3 | » | 45 | » | 0.00000 | 0.15051 | 0.10413 | 0.25465 | 1.2699 | 1.7974 | 3.0673 | 0.5275 |
| 10 | 2 | 14 | 30 | » | 0.23856 | 0.30103 | 0.34269 | 0.40516 | 2.2013 | 2.5478 | 4.7491 | 0.3465 |
| 11 | 1 | 13 | 15 | » | 0.57193 | 0.58700 | 0.67606 | 0.69113 | 4.7431 | 4.9051 | 9.6536 | 0.1674 |
| 12 | » | » | 0 | » | *Inf. posit.* | *Inf. posit.* | *Inf. posit.* | *Inf. posit.* | *Infinit.* | *Infinit.* | *Infinito* | *zero* |

*TAV. V.* Esame del valore *EB* (fig. 14) nelle ore italiane civili.

Formola. $BE = \frac{1}{\cos D . \operatorname{sen} I'} = \frac{1}{\operatorname{sen} P . \cos . E} .. l \cos D + l \operatorname{sen} I' = l \operatorname{sen} P + l \cos E$

| ORE | D | | | I' | | | l cos D | l sen I' | l' BE | P | | | l sen P | l cos E 9.89587 | l BE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ' | " | ° | ' | " | | | | ° | ' | " | | | |
| 23 | 2 | 19 | » | 5 | 53 | 58 | 9.99964 | 9.01193 | 9.01157 | 7 | 30 | » | 9.11570 | 9.01157 | 0.98843 |
| 22 | 6 | 59 | 57 | 17 | 39 | 36 | 9.99675 | 9.48196 | 9.47871 | 22 | 30 | » | 9.58184 | 9.47871 | 0.52129 |
| 21 | 11 | 49 | 59 | 29 | 18 | » | 9.99067 | 9.69965 | 9.68032 | 37 | 30 | » | 9.78445 | 9.68032 | 0.31968 |
| 20 | 16 | 55 | 44 | 40 | 43 | 50 | 9.98076 | 9.81450 | 9.79534 | 52 | 30 | » | 9.89947 | 9.68034 | 0.20466 |
| 19 | 22 | 24 | 40 | 51 | 50 | 32 | 9.96589 | 9.89560 | 9.86149 | 67 | 30 | » | 9.96362 | 9.86149 | 0.13851 |
| 18 | 28 | 25 | 32 | 62 | 30 | » | 9.94421 | 9.94793 | 9.89214 | 82 | 30 | » | 9.99627 | 9.89214 | 0.10786 |
| 17 | 35 | 8 | 13 | 72 | 32 | 6 | 9.91263 | 9.97951 | 9.89214 | 97 | 30 | » | 9.99627 | 9.89214 | 0.10786 |
| 16 | 42 | 43 | 45 | 81 | 43 | 12 | 9.86603 | 9.99545 | 9.86148 | 112 | 30 | » | 9.96362 | 9.86149 | 0.13851 |
| 15 | 51 | 22 | 20 | 89 | 46 | » | 9.79534 | 9.99999 | 9.79533 | 128 | 30 | » | 9.89947 | 9.79534 | 0.20466 |
| 14 | 61 | 11 | 24 | 83 | 40 | 20 | 9.68297 | 9.99735 | 9.68032 | 142 | 30 | » | 9.78445 | 9.68032 | 0.31968 |
| 13 | 72 | 8 | 14 | 78 | 59 | 20 | 9.48678 | 9.99193 | 9.47871 | 157 | 30 | » | 9.58284 | 9.47871 | 0.52129 |
| 12 | 83 | 56 | 18 | 76 | 32 | 12 | 9.02336 | 9.98790 | 9.01156 | 172 | 30 | » | 9.11570 | 9.01157 | 0.98843 |
| 11 | 96 | 3 | 42 | 76 | 32 | 12 | *negativo* 9.02366 | 9.98790 | *negativo* 9.01156 | 187 | 30 | » | *negativo* 9.11570 | *negativo* 9.01157 | 0.98843 |
| 10 | 107 | 51 | 46 | 78 | 59 | 20 | 9.48678 | 9.99193 | 9.47871 | 202 | 30 | » | 9.58284 | 9.47871 | 0.52120 |
| 9 | 118 | 48 | 36 | 83 | 40 | 20 | 9.68297 | 9.99735 | 9.68032 | 117 | 30 | » | 9.78445 | 9.68032 | 0.31968 |

*Tav. VI.* **Esame del valore** $EB$ **(fig. 14) nelle ore babilonesi.**

**Formola.** $BE = \frac{1}{\cos D . \operatorname{sen} I'} = \frac{1}{\operatorname{sen} P . \cos . E} \, .. \, l \cos D + l \operatorname{sen} I' = l \operatorname{sen} P + l \cos E$

| ORE | D | | | I' | | | l cos D | l sen I' | l' BE | P | l sen P | l cos E 9.89587 | l BE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° | ' | " | ° | ' | " | | | | ° | | | |
| 1 | 4 | 38 | 5 | 11 | 47 | 22 | 9.99857 | 9.31030 | 9.30887 | 15 | 9.41300 | 9.30887 | 0.69113 |
| 2 | 9 | 23 | 26 | 23 | 30 | » | 9.99414 | 9.60070 | 9.59484 | 30 | 9.69897 | 9.59484 | 0.40516 |
| 3 | 14 | 20 | 28 | 35 | 2 | 56 | 9.98625 | 9.75912 | 9.74535 | 45 | 9.84948 | 9.74535 | 0.25465 |
| 4 | 19 | 36 | 50 | 46 | 20 | » | 9.97404 | 9.83936 | 9.83340 | 60 | 9.93753 | 9.83340 | 0.16660 |
| 5 | 25 | 20 | 30 | 57 | 14 | 20 | 9.95606 | 9.92476 | 9.88082 | 75 | 9.98494 | 9.88081 | 0.11919 |
| 6 | 31 | 41 | » | 67 | 36 | 20 | 9.92991 | 9.96596 | 9.89587 | 90 | 0.00000 | 9.89587 | 0.10413 |
| 7 | 38 | 48 | 44 | 77 | 15 | » | 9.89165 | 9.98916 | 9.88081 | 105 | 9.98494 | 9.88081 | 0.11919 |
| 8 | 46 | 54 | 40 | 85 | 54 | 20 | 9.83450 | 9.99889 | 9.83339 | 120 | 9.93753 | 9.83340 | 0.16660 |
| 9 | 56 | 8 | 4 | 86 | 44 | 20 | 9.74605 | 9.99929 | 9.74534 | 135 | 9.84948 | 9.74535 | 0.25465 |
| 10 | 66 | 32 | » | 81 | 4 | 20 | 9.60012 | 9.99471 | 9.59483 | 150 | 9.69897 | 9.59484 | 0.40516 |
| 11 | 77 | 57 | 32 | 77 | 27 | 46 | 9.31934 | 9.98952 | 9.30886 | 165 | 9.41300 | 9.30887 | 0.69113 |
| 12 | 90 | » | » | 76 | 13 | 28 | *Inf. neg.* | 9.98732 | » | 180 | *Inf. neg.* | » | *Infinito* |
| 13 | 102 | 2 | 28 | 77 | 27 | 46 | 9.31934 | 9.98952 | 9.30886 | 195 | 9.41300 | 9.30887 | 0.69113 |
| 14 | 113 | 28 | » | 81 | 4 | 20 | 9.60012 | 9.99471 | 9.59483 | 210 | 9.69897 | 9.59484 | 0.40516 |

*TAV. VII.* Valori (fig. 14) del raggio vettore *BK*, e delle sue parti *PB*, *PK*; *BF*, *PF* colle formole $BK = tang \frac{1}{2} + cot \frac{1}{2} I = 2BF \ldots PP = tang \frac{1}{2} I \ldots PK = cot. \frac{1}{2} I$

$$BF = \frac{tang \frac{1}{2} I + cot \frac{1}{2} I}{2} \ldots PF = \frac{\pm tang \frac{1}{2} I \mp cot \frac{1}{2} I}{2}$$

**I. PER LE ORE ITALIANE**

| ORE | ½ I ° | ′ | ″ | l tang ½ I | l c ½ I | tang ½ I PB | cot ½ I PK | PB+PK +BK =2BF | PB—PK 2PF | BF | PF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 87 | 3 | 1 | 1.28796 | 8.71204 | 19.4069 | 0.0515 | 19.4584 | 19.3554 | 9.7292 | 9.6777 |
| 22 | 81 | 10 | 12 | 0.80870 | 9.19130 | 6.4373 | 0.1554 | 6.5927 | 6.2819 | 3.2963 | 3.1409 |
| 21 | 75 | 21 | » | 0.58267 | 9.41733 | 3.8253 | 0.2614 | 4.0867 | 3.7639 | 2.0433 | 1.8819 |
| 20 | 69 | 38 | 5 | 0.43037 | 9.56963 | 2.6938 | 0.3712 | 3.0650 | 2.3126 | 1.5325 | 1.1613 |
| 19 | 64 | 4 | 44 | 0.31332 | 9.68668 | 2.0574 | 0.4860 | 2.5434 | 1.5714 | 1.2717 | 0.7857 |
| 18 | 58 | 45 | » | 0.21694 | 9.78306 | 1.6479 | 0.6068 | 2.2547 | 1.0411 | 1.1273 | 0.5205 |
| 17 | 53 | 43 | 57 | 0.13447 | 9.86553 | 1.3629 | 0.7337 | 2.0966 | 0.6292 | 1.0483 | 0.3146 |
| 16 | 49 | 8 | 24 | 0.06298 | 9.93702 | 1.1560 | 0.8650 | 2.0210 | 0.2910 | 1.0105 | 0.1455 |
| 15 | 45 | 7 | » | 0.00177 | 9.99823 | 1.0041 | 0.9959 | 2.0000 | 0.0082 | 1.0000 | 0.0041 |
| 14 | 41 | 50 | 10 | 9.95194 | 0.04806 | 0.8952 | 1.1171 | 2.0123 | 0.2219 | 1.0062 | 0.1109 |
| 13 | 39 | 29 | 40 | 9.91602 | 0.08398 | 0.8242 | 1.2133 | 2.0375 | 0.3891 | 1.0187 | 0.1946 |
| 12 | 38 | 16 | 6 | 9.89699 | 0.10301 | 0.7888 | 1.2677 | 2.0565 | 0.4789 | 1.0282 | 0.2394 |
| 11 | 38 | 16 | 6 | 9.89699 | 0.10301 | 0.7888 | 1.2677 | 2.0565 | 0.4789 | 1.0282 | 0.2394 |
| 10 | 39 | 29 | 40 | 9.91602 | 0.08398 | 0.8242 | 1.2133 | 2.0375 | 0.3891 | 1.0187 | 0.1946 |
| 9 | 41 | 50 | 10 | 9.95194 | 0.04806 | 0.8952 | 1.1171 | 2.0123 | 0.2219 | 1.0062 | 0.1109 |

*Tav. VII bis.* Valori (fig. 14) del raggio vettore $BK$, e delle sue parti $PB$, $PK$, $BF$, $PF$ colle formole $BK = 2 \, cosec \, I' \ldots PK = cosec \, I' \mp cot \, I'$

$$PF = cot \, I' \ldots BF = cosec \, I' \ldots PB = cosec \, I' \pm cot \, I'$$

### II. PER LE ORE ITALIANE

| ORE | $I' = 180° - I$ ° | ′ | ″ | $l \, cot \, I'$ | $l' \, sen \, I'$ | $cot \, I'$ $PF$ | $cosec \, I'$ $BF$ | $BF \pm PF$ $PB$ | $BF \mp PF$ $BK$ | $BF + PK$ $BK - 2BF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 53 | 58 | 0.98577 | 0.98808 | 9.6776 | 9.7292 | 19.4068 | 0.0516 | 19.4584 |
| 22 | 17 | 39 | 36 | 0.49706 | 0.31804 | 3.1409 | 3.2964 | 6.4373 | 0.1555 | 6.5928 |
| 21 | 29 | 18 | » | 0.25090 | 0.31035 | 1.7820 | 2.0454 | 3.8254 | 0.2614 | 4.0868 |
| 20 | 40 | 43 | 50 | 0.06496 | 0.18542 | 1.1614 | 1.5325 | 2.6939 | 0.3811 | 3.0650 |
| 19 | 51 | 50 | 32 | 9.89527 | 0.10440 | 0.7857 | 1.2717 | 2.0574 | 0.4860 | 2.5454 |
| 18 | 62 | 30 | » | 9.71648 | 0.05207 | 0.5209 | 1.1274 | 1.6480 | 0.6068 | 2.2548 |
| 17 | 72 | 32 | 6 | 9.49780 | 0.02049 | 0.3148 | 1.0283 | 1.3627 | 0.7337 | 2.0966 |
| 16 | 81 | 43 | 12 | 9.16294 | 0.00455 | 0.1455 | 1.0105 | 1.1560 | 0.8650 | 2.0210 |
| 15 | 89 | 46 | » | 7.60986 | 0.00000 | 0.0041 | 1.0000 | 1.0041 | 0.9959 | 2.0000 |
| 14 | 96 | 19 | 40 | 9.04489 | 0.00265 | 0.1109 | 1.0062 | 0.8953 | 1.1171 | 2.0124 |
| 13 | 101 | » | 40 | 9.28910 | 0.00806 | 0.1946 | 1.0087 | 0.8241 | 1.2133 | 2.0374 |
| 12 | 103 | 27 | 48 | 9.37914 | 0.01210 | 0.2394 | 1.0282 | 0.7888 | 1.2676 | 2.0564 |
| 11 | 103 | 27 | 48 | 9.37914 | 0.01210 | 0.2392 | 1.0282 | 0.7888 | 1.2676 | 2.0564 |
| 10 | 101 | » | 40 | 9.28910 | 0.00806 | 0.1946 | 1.0187 | 0.8241 | 1.2133 | 2.0374 |
| 9 | 96 | 19 | 40 | 9.04489 | 0.00265 | 0.1109 | 1.0062 | 0.8953 | 1.1171 | 2.0124 |

**TAV. VIII.** Valori (fig. 14) del raggio vettore $BK$, e delle sue parti $PB$, $PK$; $BF$, $PF$. colle formole $BK = tang\,\frac{x}{2}\,I + cot\,\frac{x}{2}\,I = 2BF$... $PB = tang\,\frac{x}{2}\,I$... $PK = cot\,\frac{x}{2}\,I$

$$BF = \frac{cot\,\frac{x}{2}\,I + tang\,\frac{x}{2}\,I}{2} \ldots\ PF = \frac{\pm\, tang\,\frac{x}{2}\,I \mp cot\,\frac{x}{2}\,I}{2}$$

**TAV. III. PER LE ORE BABILONESI.**

| ORE | ½ I ° | ½ I ′ | ½ I ″ | l t ½ I | l c ½ I | tang ½ I — IB | cot ½ I — IK | BK — 2BF | | BE | IF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 84 | 6 | 19 | 0.98614 | 9.01388 | 9.6860 | 0.1033 | 9.7893 | 9.5827 | 4.8946 | 4.7913 |
| 2 | 78 | 15 | » | 0.68194 | 9.31806 | 4.8078 | 0.2080 | 5.0158 | 4.5998 | 2.5079 | 2.2999 |
| 3 | 72 | 28 | 32 | 0.50064 | 9.49936 | 3.1669 | 0.3158 | 3.4827 | 2.8511 | 1.7413 | 1.4255 |
| 4 | 66 | 50 | » | 0.36865 | 9.63135 | 2.3369 | 0.4279 | 2.7648 | 1.9090 | 1.3824 | 0.9545 |
| 5 | 61 | 22 | 50 | 0.26305 | 9.73695 | 1.8326 | 0.5457 | 2.3783 | 1.2869 | 1.1891 | 0.6435 |
| 6 | 56 | 11 | 44 | 0.17422 | 9.82578 | 1.4936 | 0.6696 | 2.1632 | 0.8240 | 1.0816 | 0.4120 |
| 7 | 51 | 22 | 30 | 0.09745 | 9.90255 | 1.2516 | 0.7990 | 2.0506 | 0.4526 | 1.0253 | 0.2263 |
| 8 | 47 | 2 | 50 | 0.03106 | 9.96894 | 1.0742 | 0.9310 | 2.0052 | 0.1432 | 1.0026 | 0.0716 |
| 9 | 43 | 22 | 10 | 9.97527 | 0.07483 | 0.9447 | 1.0586 | 2.0033 | 0.1139 | 1.0017 | 0.0569 |
| 10 | 40 | 32 | 10 | 9.93206 | 0.06794 | 0.8552 | 1.1694 | 2.0246 | 0.4142 | 1.0123 | 0.1571 |
| 11 | 38 | 43 | 55 | 9.90421 | 0.09579 | 0.8021 | 1.2468 | 2.0489 | 0.4447 | 1.0244 | 0.2223 |
| 12 | 38 | 6 | 44 | 9.89556 | 0.10544 | 0.7844 | 1.2748 | 2.0592 | 0.4904 | 1.0296 | 0.2452 |
| 13 | 38 | 43 | 55 | 9.90421 | 0.09579 | 0.8021 | 1.2468 | 2.0489 | 0.4447 | 1.0244 | 0.2223 |
| 14 | 40 | 32 | 10 | 9.93206 | 0.06794 | 0.8552 | 1.1694 | 2.246 | 0.3142 | 1.0296 | 0.1571 |

*Tav. VIII bis.* Valori (fig. 14) del raggio vettore $BK$, e delle sue parti $PB$, $PK$; $BF$, $PF$. colle formole $BK = 2 \operatorname{cosec} I' \ldots PB = \operatorname{cosec} I' \pm \cot I' \ldots PF = \cot I'$

$$BF = \operatorname{cosec} I' \ldots PK = \operatorname{cosec} I' \mp \cot I'$$

## *Tav. IV.* PER LE ORE BABILONESI.

| ORE | $I'$ ° | $I'$ ′ | $I'$ ″ | $l \cot I'$ | $l \operatorname{sen} I'$ | $\cot I' = PF$ | $\operatorname{cosec} I' = BF$ | $BF \pm PF = PB$ | $BF \mp PF = PK$ | $PB + PK = BK$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 47 | 22 | 0.68045 | 0.68970 | 4.7913 | 4.8947 | 9.6860 | 0.1033 | 9.7893 |
| 2 | 23 | 30 | » | 0.36170 | 0.39930 | 2.2999 | 2.5079 | 4.8078 | 9.2080 | 5.0158 |
| 3 | 35 | 2 | 56 | 0.15399 | 0.24088 | 1.4256 | 1.7413 | 3.1669 | 0.3157 | 3.4826 |
| 4 | 46 | 20 | » | 9.97978 | 0.14064 | 0.9545 | 1.3824 | 2.3369 | 0.4279 | 2.7648 |
| 5 | 57 | 14 | 20 | 9.80855 | 0.07524 | 0.6435 | 1.1892 | 1.8327 | 0.5457 | 2.3784 |
| 6 | 67 | 36 | 32 | 9.61489 | 0.03405 | 0.4120 | 1.0816 | 1.4936 | 0.6696 | 2.1632 |
| 7 | 77 | 15 | » | 9.35464 | 0.01084 | 0.2264 | 1.0253 | 1.2517 | 0.7989 | 2.0506 |
| 8 | 85 | 54 | 20 | 8.85481 | 0.00111 | 0.0716 | 1.0026 | 1.0742 | 0.9310 | 2.0052 |
| 9 | 93 | 15 | 40 | 8.75571 | 0.00071 | 0.6570 | 1.0016 | 0.9446 | 1.0586 | 2.0032 |
| 10 | 98 | 55 | 40 | 9.19616 | 0.00529 | 0.1572 | 1.0123 | 0.8551 | 1.1695 | 2.0246 |
| 11 | 102 | 32 | 10 | 9.34705 | 0.01048 | 0.2224 | 1.0244 | 0.8020 | 1.2468 | 2.0488 |
| 12 | 103 | 46 | 32 | 9.38947 | 0.01268 | 0.2453 | 1.0296 | 0.7844 | 1.4748 | 2.0592 |
| 13 | 102 | 32 | 10 | 9.34705 | 0.01048 | 0.2224 | 1.0244 | 0.8020 | 1.2468 | 2.0488 |
| 14 | 98 | 55 | 40 | 9.19616 | 0.00529 | 0.1572 | 1.0123 | 0.8551 | 1.1695 | 2.0246 |

## *Tav. IX.* Valori (fig. 14) delle *FE*, *FG*, *GI* nelle ore italiane civili.

| ORE | D ° | D ′ | D ″ | l tang D | l′ sen I′ − l BF | l cot I′ − l PF | l′ sen D | BF. t D − FE | PF. t D − FG | $\frac{FG}{sen\ D}$ − GI | FE | FG | GI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 19 | » | 8.60696 | 0.98808 | 0.98577 | 1.39338 | 9.59504 | 9.59273 | 0.98611 | 0.3936 | 0.3915 | 9.6855 |
| 22 | 6 | 59 | 57 | 9.08909 | 0.51804 | 0.49707 | 0.91414 | 9.60713 | 9.58616 | 0.50030 | 0.4047 | 0.3856 | 3.1645 |
| 21 | 11 | 49 | 59 | 9.32121 | 9.31035 | 0.25090 | 0.68812 | 9.63156 | 9.57211 | 0.26023 | 0.4281 | 0.3733 | 1.8207 |
| 20 | 16 | 55 | 44 | 9.48341 | 0.18542 | 0.06496 | 0.53584 | 9.66883 | 9.54837 | 0.08421 | 0.4665 | 0.3535 | 1.2140 |
| 19 | 22 | 24 | 40 | 9.61532 | 0.10440 | 9.89527 | 0.41880 | 9.71972 | 9.51059 | 9.92939 | 0.5245 | 0.3240 | 0.8499 |
| 18 | 28 | 25 | 32 | 9.73342 | 0.05207 | 9.71648 | 0.32238 | 9.78549 | 9.44990 | 9.77228 | 0.6102 | 0.2818 | 0.5919 |
| 17 | 35 | 8 | 13 | 9.84744 | 0.02049 | 9.49784 | 0.23993 | 9.86793 | 9.34528 | 9.58521 | 0.7378 | 0.2214 | 0.3848 |
| 16 | 42 | 43 | 45 | 9.96554 | 0.00455 | 9.16294 | 0.16843 | 9.97069 | 9.12848 | 9.29691 | 0.9334 | 0.1344 | 0.1981 |
| 15 | 51 | 22 | 30 | 0.09745 | 0.00001 | 7.60985 | 0.10721 | 0.09746 | 7.70730 | 7.81551 | 1.2516 | 0.0051 | 0.0065 |
| 14 | 61 | 11 | 24 | 0.25965 | 0.00265 | 9.04489 | 0.05738 | 0.26230 | 9.30454 | 9.36192 | 1.8294 | 0.2016 | 0.2301 |
| 13 | 72 | 8 | 14 | 0.49176 | 0.00806 | 9.28910 | 0.02145 | 0.49982 | 9.78086 | 9.80231 | 3.1610 | 0.6038 | 0.6343 |
| 12 | 83 | 56 | 18 | 0.97395 | 0.01210 | 9.37914 | 0.00243 | 0.98605 | 1.35309 | 1.35552 | 9.6840 | 2.2547 | 2.2674 |
| 11 | 96 | 3 | 42 | 6.97395 | 0.01210 | 9.37914 | 0.00244 | 0.98605 | 1.35309 | 1.35553 | 9.6840 | 2.2547 | 2.2674 |
| 10 | 17 | 51 | 46 | 0.49176 | 0.00806 | 9.28910 | 0.02145 | 0.49982 | 9.78086 | 9.80231 | 3.1610 | 0.6038 | 0.6343 |
| 9 | 118 | 48 | 36 | 0.25965 | 0.00265 | 9.04489 | 0.05738 | 0.26230 | 9.30454 | 9.36192 | 1.8294 | 0.2016 | 0.2301 |

## TAV. X. Valori (fig. 14) delle *FE*, *FG*, *GI* per le ore babilonesi.

| ORE | D ° | D ′ | D ″ | l tang D | l′ sen I′ − l BF | l cot I′ − l PF | l′ sen D | BF. t D − FE | PF. t D − FG | FG/sen D − GI | FE | FG | GI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 38 | 5 | 9.90886 | 0.68970 | 0.68047 | 9.39856 | 9.38933 | 1.09247 | 0.68180 | 0.3968 | 0.3884 | 4.8039 |
| 2 | 9 | 23 | 26 | 9.21848 | 0.39930 | 0.36170 | 9.61778 | 9.38018 | 0.79389 | 0.37607 | 0.1147 | 0.3803 | 2.3772 |
| 3 | 14 | 20 | 28 | 9.40767 | 0.24088 | 0.15399 | 9.64833 | 9.36166 | 0.60609 | 0.16773 | 0.4452 | 0.3643 | 1.4711 |
| 4 | 19 | 36 | 30 | 9.33188 | 0.14064 | 9.97978 | 9.69252 | 9.33166 | 0.47407 | 0.00373 | 0.4926 | 0.3402 | 1.0132 |
| 5 | 23 | 20 | 30 | 9.67341 | 0.07324 | 9.80833 | 9.73063 | 9.48396 | 0.36830 | 9.85246 | 0.5632 | 0.3048 | 0.7120 |
| 6 | 31 | 41 | » | 9.79043 | 0.03404 | 9.61488 | 9.82447 | 9.40331 | 0.27973 | 9.68304 | 0.6673 | 0.2343 | 0.4842 |
| 7 | 38 | 48 | 44 | 9.90343 | 0.01084 | 9.35464 | 9.91629 | 9.26009 | 0.20290 | 9.46299 | 0.8247 | 0.1820 | 0.2904 |
| 8 | 46 | 34 | 40 | 0.02899 | 0.00111 | 8.85481 | 0.03010 | 8.88380 | 0.13630 | 9.02030 | 1.0718 | 0.0765 | 0.1048 |
| 9 | | | | | | | | | | | | | |
| | 56 | 8 | 4 | 0.17321 | 0.00071 | 8.73371 | 0.17392 | 8.93892 | 0.08373 | 9.00970 | 1.4923 | 0.0849 | 0.1003 |
| 10 | 66 | 32 | » | 0.36239 | 0.00329 | 9.19616 | 0.36768 | 9.33833 | 0.03749 | 9.79604 | 2.3317 | 0.3639 | 0.3945 |
| 11 | 77 | 37 | 32 | 0.67099 | 0.01048 | 9.34108 | 0.68147 | 0.01807 | 0.00966 | 0.02773 | 4.8023 | 1.0435 | 1.0659 |
| 12 | 90 | » | » | *Infinita* | 0.01268 | 9.38947 | *Infinita* | *Infinita* | 0.00000 | *Infinita* | *Infinita* | 0.0000 | 0.0000 |
| 13 | 102 | 2 | 28 | 0.67099 | 0.01048 | 9.34708 | 0.68147 | 0.01807 | 0.00966 | 0.02773 | 4.7023 | 1.0423 | 1.0659 |
| 14 | 113 | 28 | » | 0.36239 | 0.00329 | 9.19616 | 0.36768 | 9.73833 | 0.03749 | 9.79604 | 4.3317 | 0.3339 | 0.3945 |

**Tav. XI.** Valori $ET$, $ET'$ (fig. 14) dai punti equinoziali ai tropici

Registro. Sia (§ 7) $5 = 30°, 24', 20''$, ed $S' = 59°, 35', 40''$ $l\ sen\ 5 = 9.70425$

Si faccia $A = S' + D$...$B = S' - D$...avremo nelle ore italiane civili.

| ORE | A ° | A ' | A '' | l' sen A | B ° | B ' | B '' | l sen B | l' BE | BE. sen S / sen A | BE. sen S / sen B | ET | ET' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 61 | 54 | 40 | 0.05442 | 57 | 16 | 14 | 0.07504 | 0.98843 | 0.74710 | 0.76772 | 5.5860 | 5. 8576 |
| 22 | 66 | 35 | 37 | 0.03729 | 52 | 35 | 43 | 0.09998 | 0.52129 | 0.26273 | 0.32552 | 1.8312 | 2. 1160 |
| 21 | 71 | 25 | 39 | 0.02324 | 47 | 45 | 41 | 0.13056 | 0.31968 | 0.04717 | 0.15449 | 1.1146 | 1. 4272 |
| 20 | 76 | 31 | 24 | 0.01213 | 42 | 39 | 56 | 0.16894 | 0.20466 | 9.92104 | 0.07785 | 0.8338 | 1. 1963 |
| 19 | 82 | » | 20 | 0.00424 | 37 | 11 | » | 0.21870 | 0.13851 | 9.84700 | 0.06146 | 0.7031 | 1. 1520 |
| 18 | 88 | 1 | 12 | 0.00026 | 31 | 10 | 8 | 0.28583 | 0.10786 | 9.81237 | 0.90794 | 0.6392 | 1. 2530 |
| 17 | 94 | 43 | 53 | 0.00148 | 24 | 27 | 27 | 0.38298 | 0.10786 | 9.81359 | 0.19509 | 0.6510 | 1. 5671 |
| 16 | 102 | 19 | 25 | 0.01012 | 16 | 51 | 55 | 0.53744 | 0.13851 | 9.85288 | 0.58020 | 0.7127 | 2. 4000 |
| 15 | 110 | 58 | 10 | 0.02976 | 8 | 13 | 10 | 0.84477 | 0.20466 | 9.93867 | 0.75368 | 0.8683 | 5. 6713 |
| 14 | 120 | 47 | 4 | 0.06596 | 1 | 35 | 44 | | 0.31968 | 0.08989 | | 1.2399 | |
| 13 | 131 | 43 | 54 | 0.12711 | 12 | 32 | 34 | | 0.52129 | 0.35265 | | 2.2524 | |
| 12 | 143 | 31 | 58 | 0.22595 | 24 | 20 | 38 | | 0.08843 | 0.91863 | | 8.2916 | |
| 11 | 155 | 39 | 22 | 0.38487 | 36 | 28 | 2 | | 0.98843 | 1.07755 | | 11.9550 | |
| 10 | 167 | 27 | 26 | 0.66320 | 48 | 16 | 6 | | 0.52129 | 0.88874 | | 7.7400 | |
| 9 | 178 | 24 | 16 | 1.55527 | 59 | 12 | 56 | | 0.31968 | 1.57920 | | 37.8391 | |

**TAV. XII.** Valori $ET$, $ET'$ dai punti equinoziali a' tropici.

Registro. Sia (§ 7) $S = 30°, 24', 20''$, ed $S' = 59° 35', 40''$; $l \, sen \, S = 9.70425$.

Si faccia $A = S' + D$ ... $B = S' - D$ ... avremo nelle ore babilonesi.

| ORE | A ° | A ' | A " | l' sen A | B ° | B ' | B " | l' sen B | l BE | BE.sen S / sen A | BE.sen S / sen B | ET | ET' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | 13 | 45 | 0.04550 | 54 | 57 | 35 | 0.08685 | 0.69113 | 0.44088 | 0.48223 | 2.7599 | 3.0355 |
| 2 | 68 | 59 | 6 | 0.03137 | 50 | 12 | 14 | 0.11445 | 0.40516 | 0.14078 | 0.22386 | 1.3829 | 1.6744 |
| 3 | 73 | 56 | 8 | 0.01730 | 45 | 15 | 12 | 0.14860 | 0.25465 | 9.97620 | 0.10750 | 0.9466 | 1.2809 |
| 4 | 79 | 12 | 30 | 0.00775 | 39 | 58 | 50 | 0.19211 | 0.16660 | 9.87860 | 0.06296 | 0.7502 | 1.1560 |
| 5 | 84 | 56 | 10 | 0.00170 | 34 | 15 | 10 | 0.24962 | 0.11919 | 9.82514 | 0.07306 | 0.6686 | 1.1833 |
| 6 | 91 | 16 | 40 | 0.00011 | 27 | 54 | 40 | 0.32966 | 0.10413 | 9.80849 | 0.13804 | 0.6434 | 1.3742 |
| 7 | 98 | 24 | 24 | 0.00469 | 20 | 46 | 56 | 0.45001 | 0.11919 | 9.82813 | 0.27345 | 0.6732 | 1.8769 |
| 8 | 106 | 30 | 20 | 0.01828 | 12 | 41 | » | 0.65844 | 0.16660 | 9.88913 | 0.52929 | 0.7747 | 3.3829 |
| 9 | 115 | 43 | 44 | 0.04534 | 3 | 27 | 36 | 1.21931 | 0.25465 | 0.00424 | 1.17821 | 1.0098 | 15.0729 |
| 10 | 126 | 7 | 40 | 0.09275 | 6 | 56 | 20 | | 0.40516 | 0.20216 | | 1.5928 | |
| 11 | 137 | 33 | 12 | 0.17076 | 18 | 21 | 52 | | 0.69113 | 0.56614 | | 3.6827 | |
| 12 | 149 | 35 | 40 | 0.29575 | 30 | 24 | 20 | | *Infinit.* | *Infinit.* | | *Infinit.* | |
| 13 | 161 | 38 | 8 | 0.50161 | 41 | 26 | 48 | | 0.69113 | 0.69699 | | 7.8884 | |
| 14 | 173 | 3 | 40 | 0.91789 | 53 | 52 | 20 | | 0.40516 | 1.02730 | | 10.6482 | |

## TAV. XIII. Valori (fig. 14) $FT$, $FT'$ dalla normale sull' oraria ai tropici.

**NELLE ORE ITALIANE CIVILI.**

Registro. $S = 30^\circ, 24', 20'' \ldots D =$ *deviazione* $\ldots S - D = A \ldots S + D = B$
Colle formole $l\,FT = l\,tang\,A + l'\,sen\,I' \ldots l\,FT' = l\,tang\,B + l'\,sen\,I'$.

| ORE | A ° | A ' | A " | l tang A | B ° | B ' | B " | l tang B | l' sen I' | l FT | l FT' | FT | FT' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 28 | 5 | 20 | 9.72730 | 32 | 43 | 20 | 9.80789 | 0.98808 | 0.71538 | 0.79597 | 5.1926 | 6.2513 |
| 22 | 23 | 24 | 20 | 9.63636 | 37 | 24 | 17 | 9.88348 | 0.51804 | 0.15440 | 0.40152 | 1.4269 | 2.5207 |
| 21 | 18 | 34 | 31 | 9.52634 | 42 | 14 | 19 | 9.95807 | 0.31035 | 9.83669 | 0.26842 | 0.6856 | 1.8553 |
| 20 | 13 | 28 | 36 | 9.37957 | 47 | 20 | 4 | 0.03542 | 0.18542 | 9.56499 | 0.22084 | 0.3673 | 1.6628 |
| 19 | 7 | 59 | 40 | 9.14750 | 52 | 49 | » | 0.11999 | 0·10440 | 9.25190 | 0.22439 | 0.1786 | 1.6765 |
| 18 | 1 | 58 | 48 | 8.53872 | 58 | 49 | 52 | 0.21833 | 0.05207 | 8.59079 | 0.27040 | 0.0390 | 1.8638 |
| 17 | 4 | 43 | 53 | 8.91778 | 65 | 32 | 33 | 0.34215 | 0.02049 | 8.93827 | 0.36264 | 0.0868 | 2.3048 |
| 16 | 12 | 19 | 25 | 9.33938 | 73 | 8 | 5 | 0.51831 | 0.00455 | 9.34393 | 0.52286 | 0.2208 | 3.3332 |
| 15 | 20 | 58 | 10 | 9.58348 | 81 | 46 | 50 | 0.84028 | 0.00001 | 9.58349 | 0.84029 | 0.3833 | 6.9225 |
| 14 | 30 | 47 | 4 | 9.77506 | | | | | 0.00265 | 9.77771 | | 0.5994 | |
| 13 | 41 | 43 | 54 | 9.95034 | | | | | 0.00806 | 9.95841 | | 0.9087 | |
| 12 | 53 | 31 | 58 | 0.13131 | | | | | 0.01210 | 0.14341 | | 1.3913 | |
| 11 | 65 | 39 | 29 | 0.34448 | | | | | 0.01210 | 0.35658 | | 2.2729 | |
| 10 | 77 | 27 | 26 | 0.65271 | | | | | 0.00806 | 0.66078 | | 4.5791 | |
| 9 | 88 | 24 | 16 | 1.55544 | | | | | 0.00265 | 1.55809 | | 36.1481 | |

*TAV. XIV.* Valori (fig. 14) *FT*, *FT'* dalla normale sull'oraria ai tropici.

**NELLE ORE BABILONESI.**

Registro. $S = 30°, 24', 20''$ ... $D$ = deviazione ... $S - D = A$ ... $S + E = B$.
Colle formole $l\,FT = l\,tang\,A + l'\,sen\,I'$ ... $l\,FT' = l\,tang\,B + l'\,sen\,I'$.

| ORE | A ° | A ' | A '' | l tang A | B ° | B ' | B '' | l tang B | l sen I' | l' FT | l FT' | FT | FT' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 46 | 15 | 9.68375 | 35 | 2 | 25 | 9.84587 | 0.68970 | 0.37345 | 0·53557 | 2.3629 | 3.4322 |
| 2 | 21 | » | 54 | 9.58451 | 39 | 47 | 46 | 9.92067 | 0.39930 | 9.98381 | 0·31997 | 0.9634 | 2.0891 |
| 3 | 16 | 3 | 52 | 9.45934 | 44 | 42 | 48 | 9.99565 | 0.24088 | 9.70022 | 0.23653 | 0.5015 | 1.7239 |
| 4 | 10 | 47 | 30 | 9.28014 | 50 | 1 | 10 | 0.07648 | 0.14064 | 9.42078 | 0.21712 | 0.2635 | 1.6484 |
| 5 | 5 | 3 | 50 | 8.94749 | 55 | 44 | 50 | 0.16689 | 0.07624 | 9.02273 | 0.24213 | 0.1054 | 1.7464 |
| 6 | 1 | 16 | 40 | 8.34840 | 62 | 5 | 20 | 0.27594 | 0.03404 | 8.38244 | 0.30999 | 0.0241 | 2.0417 |
| 7 | 8 | 24 | 24 | 9.16962 | 69 | 13 | 4 | 0.42077 | 0.01084 | 9.18046 | 0.43161 | 0.1515 | 2.7019 |
| 8 | 16 | 30 | 20 | 9.47176 | 77 | 19 | » | 0.64771 | 0.00111 | 9.47287 | 0.64882 | 0.2971 | 4.4547 |
| 9 | 25 | 43 | 44 | 9.68294 | 86 | 32 | 24 | 0.21854 | 0.00071 | 9.68364 | 1.21925 | 0.4827 | 16.5671 |
| 10 | 36 | 7 | 40 | 9.86330 | | | | | 0.00529 | 9.86859 | | 0.7389 | |
| 11 | 47 | 33 | 12 | 0.03876 | | | | | 0.01048 | 0.04924 | | 1·1200 | |
| 12 | 59 | 35 | 40 | 0.23149 | | | | | 0.01268 | 0.24417 | | 1.7547 | |
| 13 | 71 | 38 | 8 | 0.47891 | | | | | 0.01048 | 0.48939 | | 3.0859 | |
| 14 | 83 | 30 | 40 | 0.91470 | | | | | 0.00529 | 0.91999 | | 8.3174 | |

**Tav. XV.** Valori $y$, $x$ delle ordinate e delle ascisse (fig. 20) dal punto $F$

nelle ore italiane civili.

| ORE | D ° | D ′ | D ″ | l sen D | l cos D | l cot F | log x | log y | x | y | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 19 | » | 8.60662 | 9.99964 | 0.98577 | 9.59239 | 0.98541 | 0.3912 | 9.6696 | ad est |
| 22 | 6 | 59 | 57 | 9.08586 | 9.99765 | 0.49707 | 9.58293 | 0.49382 | 0.3828 | 3.1179 | |
| 21 | 11 | 49 | 59 | 9.31188 | 9.99067 | 0.25090 | 9.56278 | 0.24157 | 0.3654 | 1.7441 | |
| 20 | 16 | 55 | 44 | 9.46416 | 9.98076 | 0.06496 | 9.52912 | 0.04572 | 0.3382 | 1.1111 | |
| 19 | 22 | 24 | 40 | 9.58120 | 9.96589 | 9.89527 | 9.47647 | 9.86116 | 0.2996 | 0.7264 | |
| 18 | 28 | 25 | 32 | 9.67662 | 9.94421 | 9.71648 | 9.39310 | 9.66069 | 0.2472 | 0.4578 | (nord) |
| 17 | 35 | 8 | 13 | 9.76007 | 9.91263 | 9.49784 | 9.25791 | 9.41047 | 0.1811 | 0.2573 | |
| 16 | 42 | 43 | 45 | 9.83157 | 9.86603 | 9.16296 | 8.99453 | 9.02899 | 0.0988 | 0.1069 | |
| 15 | 51 | 22 | 13 | 9.89279 | 9.79534 | 7.60985 | 7.50264 | 7.40519 | 0.0032 | 0.0025 | |
| 14 | 61 | 11 | 24 | 9.94262 | 9.68297 | 9.04480 | 8.98742 | 8.72777 | 0.0972 | 0.0534 | ovest |
| 13 | 72 | 8 | 14 | 9.97854 | 9.48678 | 9.28910 | 9.26764 | 8.77588 | 0.1852 | 0.0597 | |
| 12 | 83 | 56 | 18 | 9.99756 | 9.02366 | 9.37914 | 9.37670 | 8.40280 | 0.2381 | 0.0253 | (sud) |
| 11 | 93 | 3 | 42 | 9.99756 | 9.02366 | 9.37914 | 9.37670 | 8.40280 | 0.2381 | 0.0253 | |
| 10 | 107 | 51 | 46 | 9.97854 | 9.48678 | 9.28910 | 9.26764 | 8.77588 | 0.1852 | 0.0597 | est |
| 9 | 118 | 48 | 36 | 9.94262 | 9.68297 | 9.04480 | 8.98742 | 8.72777 | 0.0972 | 0.0534 | |

*Tav. XVI.* Valori $x$, $y$ delle ascisse e delle ordinate da $PF$ presa per asse la meridiana.

| ORE | D ° | D ′ | D ″ | l sen D | l cos D | l cot I′ | log x | log y | x | y | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 38 | 5 | 9.90743 | 9.99857 | 0.68045 | 9.58788 | 0.67902 | 0.3872 | 4.7756 | (Nord) ad ovest |
| 2 | 9 | 23 | 26 | 9.21262 | 9.99414 | 0.36170 | 9.57432 | 0.35584 | 0.3753 | 2.2691 | |
| 3 | 14 | 20 | 28 | 9.39390 | 9.98625 | 0.15399 | 9.54789 | 0.14024 | 0.3631 | 1.3812 | |
| 4 | 19 | 36 | 50 | 9.52591 | 9.97404 | 9.97978 | 9.50569 | 9.95382 | 0.3204 | 0.8992 | |
| 5 | 25 | 20 | 30 | 9.63147 | 9.95606 | 9.80855 | 9.44002 | 9.76461 | 0.2754 | 0.5816 | |
| 6 | 31 | 41 | » | 9.72034 | 9.92991 | 9.61489 | 9.33523 | 9.54480 | 0.2164 | 0.3506 | |
| 7 | 38 | 48 | 44 | 9.79710 | 9.89165 | 9.35464 | 9.15174 | 9.24629 | 0.1418 | 0.1763 | |
| 8 | 46 | 54 | 40 | 9.86349 | 9.83450 | 8.85481 | 8.71830 | 8.68931 | 0.0523 | 0.0489 | |
| 9 | 56 | 8 | 4 | 9.91925 | 9.74605 | 8.75571 | 8.67496 | 8.50176 | 0.0473 | 0.0318 | est (sud) ovest |
| 10 | 66 | 32 | » | 9.96251 | 9.60012 | 9.19616 | 9.15867 | 8.79628 | 0.1441 | 0.0626 | |
| 11 | 77 | 57 | 32 | 9.99034 | 9.31935 | 9.34705 | 9.33739 | 8.66640 | 0.2175 | 0.0464 | |
| 12 | 90 | » | » | 0.00000 | *Infin. neg.* | 9.38947 | 9.38947 | *Infin. neg.* | 0.2452 | 0.0000 | |
| 13 | 102 | 2 | 28 | 9.99034 | 9.31935 | 9.34705 | 9.33739 | 8.66640 | 0.2175 | 0.0464 | |
| 14 | 113 | 28 | » | 9.96251 | 9.60012 | 9.19616 | 9.15847 | 8.79628 | 0.1441 | 0.0626 | |

**

TAV. XVII. (fig. 14, 20) Fatto l'indice $LP = 1, 0000$.

Valori necessarî per descrivere le ore italiane.

| ORE | OE<br>E ad est | EB = EA<br>Est Ovest | BF = FK<br>B ad est | GP<br>G ad est | ET | ET' | x<br>a nord | y<br>ad est |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 9.6539 | 9.7375 | 9.7292 | 9.6855 | 5.5860 | 5.8576 | 0.3912 | 9.6696 |
| 22 | 3.0684 | 3.3212 | 3.2963 | 3.1645 | 1.8312 | 2.1160 | 0.3828 | 3.1179 |
| 21 | 1.6563 | 2.0926 | 2.0433 | 1.8207 | 1.1146 | 1.4272 | 0.3654 | 1.7441 |
| 20 | 0.9752 | 1.6020 | 1.5325 | 1.2140 | 0.8338 | 1.1963 | 0.3382 | 1.1111 |
| 19 | 0.5264 | 1.3757 | 1.2717 | 0.8499 | 0.7031 | 1.1520 | 0.2996 | 0.7264 |
| 18 | 0.1673 | 1.2819 | 1.1273 | 0.5919 | 0.6492 | 1.2530 | 0.2472 | 0.4578 |
| 17 | E ad ovest<br>0.1673 | 1.2819 | 1.0483 | 0.3848 | 0.6510 | 1.5671 | 0.1811 | 0.2573 |
| 16 | 0.5264 | 1.3757 | 1.0105 | 0.1981 | 0.7127 | 2.4000 | 0.0995 | 0.1069 |
| 15 | 0.9752 | 1.6020 | 1.0000 | 0.0065 | 0.8683 | 5.6713 | 0.0032 | 0.0025 |
| 14 | 1.6563 | 2.0926 | 1.0062 | G ad ovest<br>0.2301 | 1.2299 | Val. costanti | A sud<br>0.0972 | Ad ovest<br>0.0534 |
| 13 | 3.0684 | 3.3212 | 1.0187 | 0.6343 | 2.2524 | OP=0.7844 | 0.1852 | 0.0597 |
| 12 | 9.6539 | 9.7375 | 1.0282 | 2.2674 | 8.2916 | PC=1.2748 | 0.2381 | 0.0253 |
| 11 | E ad est<br>9.6539 | invertendo<br>9.7375 | B ad ovest<br>1.0282 | G ad est<br>2.2674 | 11.9550 | | 0.2381 | Ad est<br>0.0253 |
| 10 | 3.0684 | 3.3212 | 1.0187 | 0.6343 | 7.7400 | | 0.1852 | 0.0597 |
| 9 | 1.6563 | 2.0926 | 1.0062 | 0.2301 | 37.9491 | | 0.0972 | 0.0534 |

*TAV. XVIII.* Tentativi dell' ordinata massima nel nodo.

| ORE | | $l\,t\,{}^1/_2\,P$ | | $l\,t\,{}^1/_2\,P$ | $+l\,sen\,E$ 9.79043 | $l\,tang\,D$ | | | $l\,s\,{}^1/_2\,P$ | $+l\,cos\,E$ 9.89587 | $l\,sen\,{}^1/_2\,I'$ | | | $I'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h | ′ | ° | ′ | | | ° | ′ | ″ | | | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ |
| 10 | 12 | 76 | 30 | 0.61965 | 0.41008 | 68 | 44 | 44 | 9.98783 | 9.88370 | 49 | 54 | 50 | 99 | 49 | 40 |
| 10 | 8 | 76 | » | 0.60323 | 0.39366 | 68 | » | 11 | 9.98690 | 9.88277 | 49 | 46 | 5 | 99 | 32 | 10 |
| 10 | 4 | 75 | 30 | 0.58734 | 0.37777 | 67 | 15 | 57 | 9.98594 | 9.88181 | 49 | 37 | 6 | 99 | 14 | 12 |
| | | ore | | $l\,sen\,D$ | $l\,cos\,D$ | $l\,cot\,I'$ | | | $log\,x$ | $log\,y$ | $x$ | | | $y$ | | |
| 10 | 12 | » | » | 9.96940 | 9.55933 | 9.23862 | | | 9.20802 | 8.79795 | 0.16145 | | | 0.06280 | | |
| 10 | 8 | » | » | 9.96717 | 9.57351 | 9.22528 | | | 9.19245 | 8.79879 | 0.15576 | | | 0.06292 | | |
| 10 | 4 | » | » | 9.96487 | 9.58710 | 9.21118 | | | 9.17605 | 8.79828 | 0.14999 | | | 0.06285 | | |

*TAV. XIX.* Valori $x$, $y$ delle ascisse ed ordinate per descrivere il nodo.

*(Fig. 21)* 1. Sulla *NL* si elevi l' asse *PT*, e le due obblique formino l' angolo $\omega = 38°\ 19',\ 51''$. (Vedi § 19 I).

2. Le ascisse $x$ progrediscano da $P$ verso $T$, e le ordinate $y$ corrispondano simmetricamente ai due lati.

| | $x$ |
|---|---|
| 1 | 0.0473 |
| 2 | 0.0972 |
| 3 | 0.1441 |
| 4 | 0.1500 |
| 5 | 0.1558 |
| 6 | 0.1614 |
| 7 | 0.1852 |
| 8 | 0.2175 |
| 9 | 0.2381 |
| 10 | 0.2452 |
| | $y$ |
| 1 | 0.0318 |
| 2 | 0.0534 |
| 3 | 0.0626 |
| 4 | 0.0628 |
| 5 | 0.0629 |
| 6 | 0.0628 |
| 7 | 0.0597 |
| 8 | 0.0464 |
| 9 | 0.0253 |
| 10 | 0.0000 |

| | | ERRORI | CORREZIONI |
|---|---|---|---|
| Pag. 19 | lin. 16 | $_2 P - 45^\circ$.......... | $^1/_2\, P - 45^\circ$ |
| 28 | 14 | *(fig. 11)*........... | *(fig. 13)* |
| 29 | 16 | *(fig. 12)*........... | *(fig. 11)* |
| 35 | 3 | vettore $IF$........ | vettore $PF$ |
| 44 | 17 | Per usare ec...... | 67. Per usare ec. |
| 63 | 3 | 78 Quanto ec..... | Quanto ec. |
| ivi | 9 | Riferendo ec....... | 78. Riferendo ec. |
| ivi | 14 | 75. La deviazione | La deviazione ec. |
| ivi | 29 | 79. L'inclinazione | L' inclinazione ec. |
| 64 | 10 | Le tavole ec...... | 79. Le tavole ec. |
| 85 | 5 | § 4 Valori ec..... | Esame IV. Valori ec. |
| 86 | 15 | *l' ultimo termine del numeratore* $x^4 \cot {}^1/_2 E$. | $x^4 \cot^2 E$ |

Tav. I. lin. 1 italiani civili........ italiane civili

Tav. VIII colonna 9. 10 $BE$, $IF$ $BF$, $PF$

Tav. VIII *bis* linea dell'ora 9 colonna $\cot I' - PF$... *0.6570*.... invece di *0.0570*

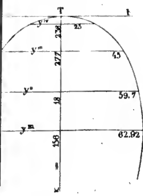
Tav. IX e X $GI$..................... $GP$

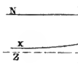
Tav. XI. Registro. Sia (§ 7) $S = 30^\circ, 24', 20''$... $S = 30^\circ, 24', 20''$

Ivi $l \operatorname{sen} S = 9.70425$...$l \operatorname{sen} S = 9.70425$

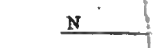


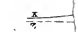

17 T 16 L 15 0 14 13 E


T
t
25
238
277
45
59.7
18
62.92
156


N
x
Z


B


N


x

